



中华人民共和国国家计量技术规范

JJF 1048-xxxx

数据采集系统校准规范

Calibration Specification of Data Acquisition Systems

(征求意见稿)

xxxx-xx-xx发布

xxxx-xx-xx实施

国家市场监督管理总局发布

数据采集系统校准规范
Calibration Specification of Data
Acquisition Systems

JJF 1048—XXXX
代替 JJG 1048—1995

归口单位：全国无线电计量技术委员会

起草单位：北京长城计量测试技术研究所
中国计量科学研究院

本规范委托全国无线电计量技术委员会负责解释

本规范主要起草人：

参加起草人：

目录

Calibration Specification of Data Acquisition Systems.....	1
引 言.....	III
1 范围.....	1
2 术语和计量单位.....	1
2.1 数据采集系统 data acquisition system.....	1
2.2 信号调理器 signal conditioner.....	错误!未定义书签。
2.3 通道 channel.....	错误!未定义书签。
2.4 通道采集速率 sampling rate per channel.....	1
2.5 循环采集速率 cycle sampling rate of multi-channels.....	1
2.6 单通道采集速率 sampling rate of single channel.....	1
2.7 通道间串扰 crosstalk between channels.....	1
2.8 有效位数 effective number of bits.....	1
2.9 最大允许误差 error limit.....	错误!未定义书签。
3 概述.....	1
4 计量特性.....	2
5 校准条件.....	2
5.1 环境条件.....	2
5.2 校准用设备.....	2
5.3 被校数据采集系统的要求.....	错误!未定义书签。
6 校准项目和校准方法.....	3
6.1 校准项目.....	3
6.2 工作正常性检查.....	4
6.3 线性度.....	4
6.4 最大允许误差、随机噪声.....	7
6.5 有效位数、交流增益、直流偏移.....	11
6.6 采集速率.....	12
6.7 频带宽度.....	14
6.8 频率响应.....	14
6.9 瞬态响应.....	15
6.10 通道间延迟时间差.....	15

6.11 时间漂移	9
6.12 通道间串扰	16
6.13 输入电阻	20
6.14 共模抑制比	17
6.15 串模抑制特性	19
6.16 温度漂移特性	10
6.17 触发特性	21
7 校准结果表达	23
8 复校时间间隔	23
附录 A	24
原始记录格式	24
附录 B	26
校准证书内页格式	26
附录 C	59
正弦波形序列的最小二乘拟合算法	59
附录 D	65
周期波形的等效采样方法	65
附录 E	66
正弦波形序列幅度估计方法	66
附录 F（资料性附录）	67
测量不确定度评定	67

引 言

本规范是对 JJF 1048-1995《数据采集系统校准规范》的修订。

本规范在制定时，基本参数的定义和校准方法参照了 IEEE Std 1057 (IEEE Standard for Digitizing Waveform Recorders)，并对该标准没有明确规定的部分作了部分技术补充，体现在四参数正弦曲线拟合收敛算法、采集速率校准方法、通道间延迟时间差校准方法等方面。

本次修订，术语参照了 JJF1001-2011《通用计量术语及定义》和 JJF 1188-2008《无线电计量名词术语及定义》，编写依据了 JJF1071-2010《国家计量校准规范编写规则》和 JJF1059.1-2012《测量不确定度评定与表示》。与原版本相比，本次修订版的变化主要体现在：

- 适应数据采集技术发展的需要，不再对被校准数据采集系统的 A/D 位数进行 16bits 以下的技术限制，以及对最高采集速率进行 15MSa/s 以下的技术限制；
- 针对采集速率校准，增加了正弦波拟合校准方法，以降低校准结果的不确定度；
- 针对同步采集需求，增加了通道间延迟时间差校准项目；
- 针对动态特性的校准需求，增加了频率特性、瞬态响应特性、交流增益校准项目；
- 增加了触发特性的检查和校准项目；
- 增加了四参数正弦曲线拟合收敛算法；
- 针对校准中的高采样速率需求，增加了等效采样方法，以适应瞬态响应特性的校准需要；
- 增补了主要校准项目的不确定度评定示例，并将一些过程复杂的参数不确定度评定以资料性附录方式的示例给出。

本规范历次版本发布情况：

JJF 1048-1995，1995 年 5 月 31 日批准发布，1996 年 5 月 1 日实施

数据采集系统校准规范

1 范围

本规范适用于以电压作为模拟量输入的数据采集系统的校准。其它模拟量输入的数据采集系统校准，可参照执行。

2 术语和计量单位

2.1 数据采集系统 data acquisition system

将输入的模拟信号通过采样、量化，转化成具有幅度量化特征和时序抽样特征的离散信号数据序列供存储和使用的装置。

2.2 通道采集速率 sampling rate per channel

数据采集系统在采集数据过程中，某一采集通道在单位时间内采集的数据个数称为该通道的通道采集速率。单位：Sa/s，每秒样本数。

2.3 多通道采集速率 sampling rate of multi-channels

数据采集系统在多通道采集方式下执行采集时，所有采集通道在单位时间内采集的数据个数。单位：Sa/s，每秒样本数。

2.4 单通道采集速率 sampling rate of single channel

系统只有一个通道执行采集的工作方式称为单通道采集。单通道采集时的通道采集速率称为单通道采集速率。单位：Sa/s，每秒样本数。

2.5 通道间串扰 crosstalk between channels

数据采集过程中，前一采集通道对其逻辑后继采集通道的的影响。单位：dB，分贝。

2.6 有效位数 effective number of bits

以模数转换方式进行波形测量时，对波形测量结果带来的附加信噪失真比所对应的理想模数转换位数。单位：bits，位。

3 概述

数据采集系统的种类很多，典型结构如图 1 所示。其核心部分是电量的测量。

作为被测量的模拟信号，通过信号调理电路和多路开关后，再经过 A/D 转换器进行模数转换，并最终被计算机系统存储，完成数据采集过程。

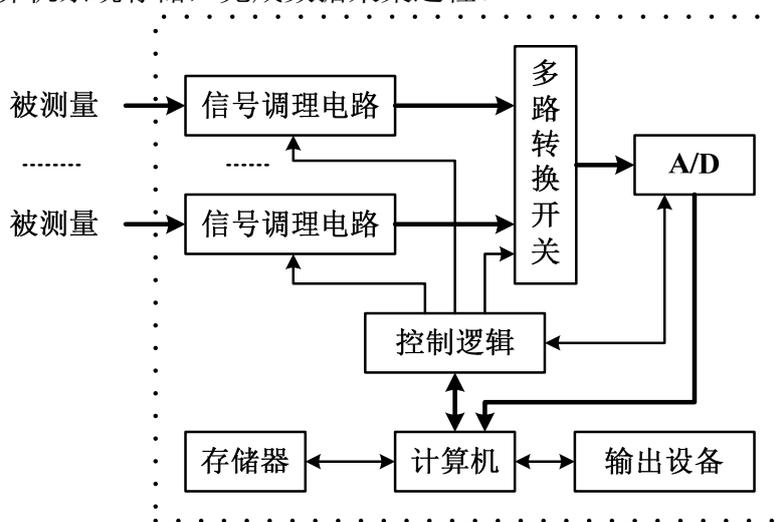


图 1 数据采集系统典型结构

4 计量特性

数据采集系统的主要计量特性如表 1 所示。

表 1 计量特性

参数	指标	备注
量程范围:	0V~±1000V	
线性度:	±0.01%	
增益误差:	±0.01%	相对误差
直流偏移误差:	±0.01%	相对于满量程
最大允许误差:	±0.01%	相对于满量程
随机噪声:	±0.01%	相对于满量程
时间漂移:	零点漂移: ±0.01%	相对于满量程
	增益漂移: ±0.01%	相对误差
温度漂移:	零点漂移: ±0.01%/°C	相对于满量程
	增益漂移: ±0.01%/°C	相对误差
有效位数:	14 bits	
采集速率:	100MSa/s, 最大允许误差: ±1×10 ⁻⁶	
频带宽度:	1MHz	
幅频特性:	±0.5dB	在标注的频率范围内
瞬态响应特性:	上升时间>0.35μs	
通道间延迟时间差:	±0.01 个采样间隔	
通道间串扰:	-60dB	
共模抑制比:	80dB (DC, 50Hz)	
串模抑制比:	60dB (50Hz)	
输入电阻:	50Ω, ±1%; 1MΩ, ±0.5%	
触发特性:	触发延时: 0~1s	仅用于触发性能参数核验
	最窄触发脉宽: 1μs	
	最小触发沿斜率: 1mV/s	
	触发灵敏度: 1mV	

注: 以上技术指标不作合格性判别, 仅提供参考

5 校准条件

5.1 环境条件

5.1.1 环境温度: 23°C±5°C

5.1.2 相对湿度: ≤80%

5.1.3 供电电源: 220V±11V, 50Hz±1Hz

5.1.4 周围无影响仪器正常工作的电磁干扰及机械振动。

5.2 校准用设备

5.2.1 直流电压源

幅度范围: ±(10mV~1000V)

最大允许误差: ±0.03%~±0.001%

5.2.2 正弦标准源

幅度范围：1mV~100V
 幅度最大允许误差： $\pm 0.006\%$ ~ $\pm 0.003\%$
 频率范围：10Hz~1MHz
 频率最大允许误差： $\pm 5.0 \times 10^{-5}$
 总失真度： $\leq -60\text{dB}$

5.2.3 共模电压源

(1)、直流共模电压源

幅度范围：1mV~1000V
 最大允许误差： $\pm 1\%$
 接地要求：浮地输出

(2)、交流共模电压源

幅度范围：1mV~1000V
 幅度最大允许误差： $\pm 1\%$
 频率范围：10Hz~20kHz
 频率最大允许误差： $\pm 1.0 \times 10^{-4}$
 接地要求：浮地输出

5.2.4 信号发生器

(1)、正弦信号

幅度范围：1mV~10V
 幅度平坦度： $\pm 0.1\text{dB}$
 频率范围：10Hz~3MHz
 频率最大允许误差： $\pm 5.0 \times 10^{-7}$

(2)、方波脉冲信号

幅度范围：10mV~5V
 幅度最大允许误差： $\pm 1\%$
 频率范围：0.01Hz~100kHz；占空比可调。
 频率步进：1mHz
 频率最大允许误差： $\pm 5.0 \times 10^{-5}$
 上升时间： $\leq 10\text{ns}$

(3)、三角波信号

幅度范围：10mV~5V
 幅度最大允许误差： $\pm 1\%$
 频率范围：0.01Hz~100kHz
 频率步进：1mHz
 频率最大允许误差： $\pm 5.0 \times 10^{-5}$

注：校准用输入输出信号线长一般在 1m~2m，线型采用与实际使用时相同种类，或依说明书规定。其它情况，使用接地双绞屏蔽线。

6 校准项目和校准方法

6.1 校准项目

校准项目见表 2 所示。

表 2 校准项目

序号	项目名称	条款	首次校准	后续校准	备注
1	工作正常性检查	6.2	+	+	
2	线性度	6.3	+	+	
3	增益	6.4	+	+	含直流增益和交流增益
4	直流偏移	6.5	+	+	
5	最大允许误差	6.6	+	+	
6	随机噪声	6.6	+	+	
7	时间漂移	6.7	+	+	
8	温度漂移	6.8	+	+	
9	有效位数	6.9	+	+	
10	采集速率	6.10	+	+	
11	频带宽度	6.11	+	-	
12	幅频特性	6.12	+	+	
13	瞬态响应特性	6.13	+	+	
14	通道间延迟时间差	6.14	+	+	
15	通道间串扰	6.15	+	+	
16	差分输入共模抑制比	6.16	+	+	仅适用于差分输入的系统
17	串模抑制比	6.17	+	+	仅适用于通频带不包含工频的系统
18	输入电阻	6.18	+	-	
19	触发特性	6.19	+	-	仅适用于具有触发功能的系统

注：以上全部校准项目均可视应用场合而选择校准与否。后续校准中打“-”号的项目，属于在首次计量时需要校准，而后续计量中可以不必要求校准的项目，后续校准中打“+”号的项目，属于在首次计量时需要校准，则后续计量中也要求校准的项目。

6.2 工作正常性检查

6.2.1 外观检查

被校准的数据采集系统应配有使用说明书和相应的软件资料，以及全部必备附件。送校单位应提供其所有要求计量的性能指标。并包括：① 输入电阻；② 频带宽度；③ 模数转换位数；④ 量程；⑤ 供电源及功耗；⑥ 采集速率；⑦ 通道数；⑧ 数据容量等。

数据采集系统的外形结构应完好，开关、按键、旋钮等，操作灵活可靠，标志清晰明确，外露件不应有松动和机械损伤，其铭牌或外壳上应标明其名称、生产厂家、型号和编号，供电电源的标志及电压和频率范围指示明确。

6.2.2 通电检查

外观检查后，按使用说明书通电，对数据采集系统各种功能进行检查，均应正常。人身感应、摆放位置和方向等对其性能的影响应可忽略不计。

功能性检查完成后，给系统所选定的检查通道加入其量限内的任意非零恒定信号（一般是在通道测量范围上限或下限的 50~90% 以内），检查其测量、触发、存储和数据传送等工作状况，确定其能够正常可靠工作。

按使用说明书的要求及随机提供的软件，做数据采集系统与通用电子计算机通信功能的检查，应能够准确无误地进行数据交换。

6.2.3 预热及预调整

校准前，按说明书要求对数据采集系统预热。无特别要求时，预热 30min。

正式校准前，可按使用说明书对数据采集系统进行预调整，包括通道增益、滤波带宽、直流偏置、线性补偿、阻抗匹配等调整，校准过程中不允许作对数据采集系统性能有影响的调整。

6.3 线性度

6.3.1 方法 1：端基直线法

6.3.1.1 接线如图 2 所示，信号源是直流电压源，选定被校准数据采集系统的测量通道。

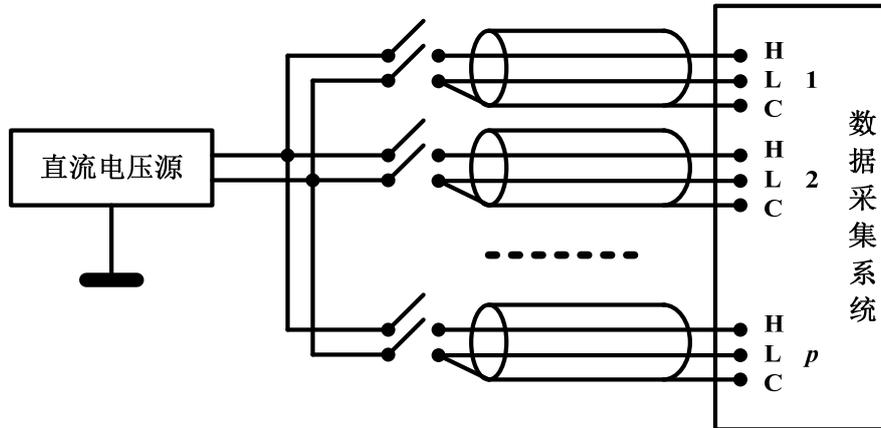


图 2 数据采集系统静态特性校准接线框图

注：H 为高电位接线端子；L 为低电位接线端子；C 为屏蔽端接线端子

6.3.1.2 设置被校准数据采集系统为单通道（或多通道）采集方式及相应最高采集速率状态。

置被校准数据采集系统采集通道量程，并进行信号点的选择。

如图 3 所示，在被校准数据采集系统采集通道测量范围(E_L , E_H)内选择 $m=11$ 个校准信号点 $E_i(i=1,2,\dots,m)$ 。

$$E_1 = E_L + E_r \times 1.25\% \quad (1)$$

$$E_i = E_L + E_r \times (i-1) \times 10\% \quad (i=2, 3, \dots, m-1) \quad (2)$$

$$E_m = E_L + E_r \times 98.75\% \quad (3)$$

$$E_r = E_H - E_L \quad (4)$$

式中： E_L ——被校准数据采集系统采集通道的测量范围下限

E_H ——被校准数据采集系统采集通道的测量范围上限

E_r ——被校准数据采集系统采集通道量程

设置在信号点 E_i 上的采集数据个数 $n(\geq 100)$ 。

6.3.1.3 用直流电压源给被校准数据采集系统采集通道顺序输入符合式(1)~(4)的信号 $E_i(i=1,\dots,m)$ 激励，启动采集，记录采集数据 $x_{ij}(j=1,\dots,n)$ 。

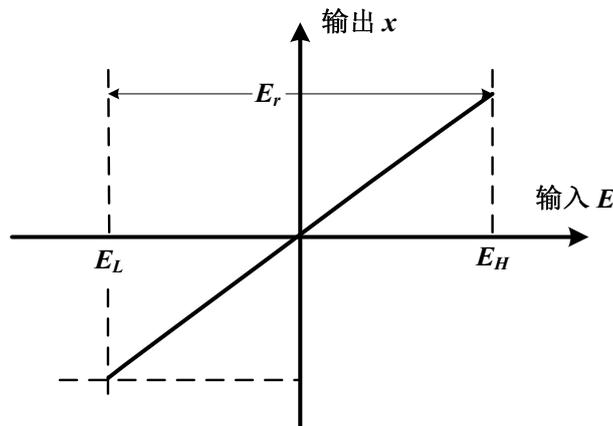


图 3 数据采集系统输入输出特性

6.3.1.4 按式(5)~(9)计算数据采集系统采集通道的线性度 L 。

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

$$G = \frac{\bar{x}_m - \bar{x}_1}{E_m - E_1} \quad (6)$$

$$D = \frac{E_m \cdot \bar{x}_1 - E_1 \cdot \bar{x}_m}{E_m - E_1} \quad (7)$$

$$\Delta\bar{x}_i = \bar{x}_i - (G \cdot E_i + D) \quad (8)$$

$$\text{线性度: } L = \frac{\max(|\Delta\bar{x}_i|)_{i=2, \dots, m-1}}{G \cdot E_r} \times 100\% \quad (9)$$

式中 x_{ij} ——第 i 个信号点 E_i 的第 j 个测量数据 ($i=1, \dots, m, j=1, \dots, n$)

n ——每一通道在第 i 个信号点 E_i 上的采集数据个数 ($n \geq 100$)

G ——端基直线的斜率, 也是被校准数据采集系统的增益测量值

D ——端基直线的截矩, 也是被校准数据采集系统的直流偏移测量值

\bar{x}_i ——第 i 个信号点 E_i 上测量 n 次的平均值

$\Delta\bar{x}_i$ ——第 i 个信号点 E_i 上测量 n 次的平均值与端基直线回归值的偏差

6.3.1.5 变换量程, 重复执行 6.3.1.3~6.3.1.4, 直到所有量程校准完毕。

6.3.1.6 变换通道, 重复执行 6.3.1.2~6.3.1.5, 直到所有通道校准完毕。

6.3.1.7 将校准结果记入附录 B 所述表中。

6.3.2 方法 2: 最小二乘法

6.3.2.1 执行 6.3.1.1~6.3.1.3。

6.3.2.2 按式(10)~(16)计算系统通道的最小二乘独立线性度 L 。

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n x_{ij} \dots\dots\dots (10)$$

$$\bar{E} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m E_i \dots\dots\dots (11)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m \bar{x}_i \dots\dots\dots (12)$$

$$G = \frac{\sum_{i=1}^m (E_i - \bar{E})(\bar{x}_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^m (E_i - \bar{E})^2} \dots\dots\dots (13)$$

$$D = \bar{x} - G \cdot \bar{E} \dots\dots\dots (14)$$

$$\Delta\bar{x}_i = \bar{x}_i - (G \cdot E_i + D) \quad (15)$$

$$L = \frac{\max(|\Delta\bar{x}_i|)_{i=2, \dots, m-1}}{G \cdot E_r} \times 100\% \quad (16)$$

式中 G ——最小二乘拟合直线的斜率, 也是被校准数据采集系统的增益测量值

D ——最小二乘拟合直线的截矩, 也是被校准数据采集系统的直流偏移测量值

6.3.2.3 变换量程, 重复执行 6.3.2.1~6.3.2.2, 直到所有量程校准完毕。

6.3.2.4 变换通道, 重复执行 6.3.2.1~6.3.2.3, 直到所有通道校准完毕。

6.3.2.5 将校准结果记入附录 B 所述表中。

6.4 增益

6.4.1 方法 1: 端基直线法

- 6.4.1.1 执行 6.3.1.1~6.3.1.4, 获得被校准数据采集系统的增益测量值 G ;
 6.4.1.2 将校准结果记入附录 B 所述表中。

6.4.2 方法 2: 最小二乘法

- 6.4.2.1 执行 6.3.2.1~6.3.2.4, 获得被校准数据采集系统的增益测量值 G ;
 6.4.2.2 将校准结果记入附录 B 所述表中。

6.4.3 方法 3: 正弦拟合法

6.4.3.1 执行 6.9.1~6.9.5, 获得频率 f 的输入正弦信号峰值 E_p 的最小二乘估计值 E , 按式(17)计算被校通道的交流增益 G 。

$$G=E/E_p \dots\dots\dots (17)$$

- 6.4.3.2 将校准结果记入附录 B 所述表中。

6.5 直流偏移

6.5.1 方法 1: 端基直线法

- 6.5.1.1 执行 6.3.1.1~6.3.1.4, 获得被校准数据采集系统的直流偏移测量值 D ;
 6.5.1.2 将校准结果记入附录 B 所述表中。

6.5.2 方法 2: 最小二乘法

- 6.5.2.1 执行 6.3.2.1~6.3.2.4, 获得被校准数据采集系统的直流偏移测量值 D ;
 6.5.2.2 将校准结果记入附录 B 所述表中。

6.5.3 方法 3: 正弦拟合法

- 6.5.3.1 执行 6.9.1~6.9.5, 获得被校准数据采集系统的直流偏移测量值 D ;
 6.5.3.2 将校准结果记入附录 B 所述表中。

6.6 最大允许误差、随机噪声

6.6.1 单通道采集时最大允许误差、随机噪声的校准

6.6.1.1 接线如图 2 所示, 信号源是标准直流电压源。

6.6.1.2 选定被测数据采集系统校准通道和量程, 设置系统为单通道最高采集速率状态。设置通道采集数据个数 n (≥ 100)。

6.6.1.3 按 6.3.1.2 中规定顺序选择 m 个信号幅度 E , 加载信号, 启动采集。记录采集数据 x_i ($i=1, \dots, n$)。

按式(18)~(20)计算 E 值处的最大允许误差 A 、随机噪声标准差 σ 。

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \dots\dots\dots (18)$$

$$A = \pm \frac{|\bar{x} - G_0 \cdot E|}{G_0 \cdot E_r} \times 100\% \dots\dots\dots (19)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \dots\dots\dots (20)$$

$$\Delta\bar{x} = \bar{x} - G_0 \cdot E \dots\dots\dots (21)$$

式中 x_i ——采集数据值($i=1, \dots, n$)
 \bar{x} ——采集数据平均值
 n ——每个通道的采集数据个数
 E ——系统输入标准信号的幅度
 $\Delta\bar{x}$ ——通道的系统误差
 σ ——采集数据的标准差
 G_0 ——采集系统通道的标称增益

从 m 个计算出的 A 值中, 选取最大值作为通道最大允许误差的校准结果。

6.6.1.4 变换量程, 重复执行 6.6.1.3, 直到所有量程校准完毕。

6.6.1.5 变换通道, 重复执行 6.3.2.2~6.3.2.4, 直到所有通道校准完毕。

6.6.1.6 将校准结果记入附录 B 所述表中。

6.6.2 多通道采集时最大允许误差、随机噪声的校准

6.6.2.1 在同类通道中任选出 q 个通道作为工作通道。接线如图 4 所示。

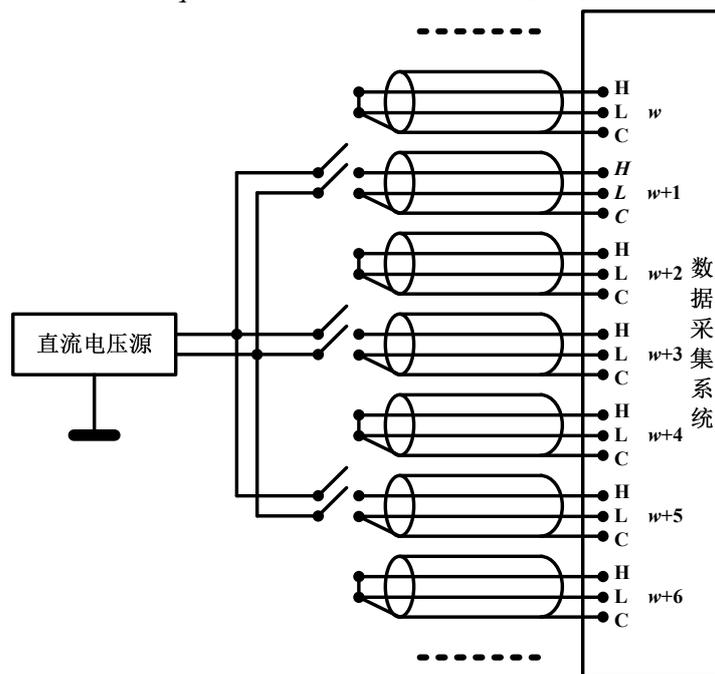


图 4 多通道采集方式最大允许误差的校准接线图

在数据采集系统的 q 个工作通道中, 每次任选 6 个采集顺序连续的通道 $w, w+1, \dots, w+5$ (不足 6 个通道的系统, 选全部通道) 作测量通道, 其余 $q-6$ 个通道输入进行短接。

6.6.2.2 设置各采集通道的量程。设定数据采集系统为多通道最高采集速率状态。

设置每个通道采集数据个数 $n (\geq 100)$ 。

6.6.2.3 按 6.3.1.2 中规定调置信号幅度为 E 。加载信号, 启动采集。记录(只需记录 $w+1$, $w+3$ 和 $w+5$ 三个通道的)采集数据 $x_i (i=1, \dots, n)$ 。

按式(18)、(20)计算通道 $w+1$ 、 $w+3$ 和 $w+5$ 在 E 值处的最大允许误差 A 、随机噪声标准差 σ 。

从各通道 q 个计算出的 A 值中, 选取最大值作为该通道最大允许误差的校准结果。从每通道 q 个计算出的 σ 值中, 选取最大值作为该通道随机噪声标准差的校准结果。

6.6.2.4 变换量程, 重复执行 6.6.2.3, 直到所有量程校准完毕。

6.6.2.5 变换通道, 重复执行 6.6.2.1~6.6.2.4, 直到所有通道校准完毕。

6.6.2.6 将校准结果记入附录 B 所述表中。

6.7 时间漂移

6.7.1 接线如图 5 所示, 将具有高稳定度的直流电压源接入被校数据采集系统, 设定测量通道。其中 R_0 为模拟信号源内阻的不平衡电阻, 有特殊规定的系统, 按规定执行。无特别要求时, R_0 取 $1k\Omega$ 。

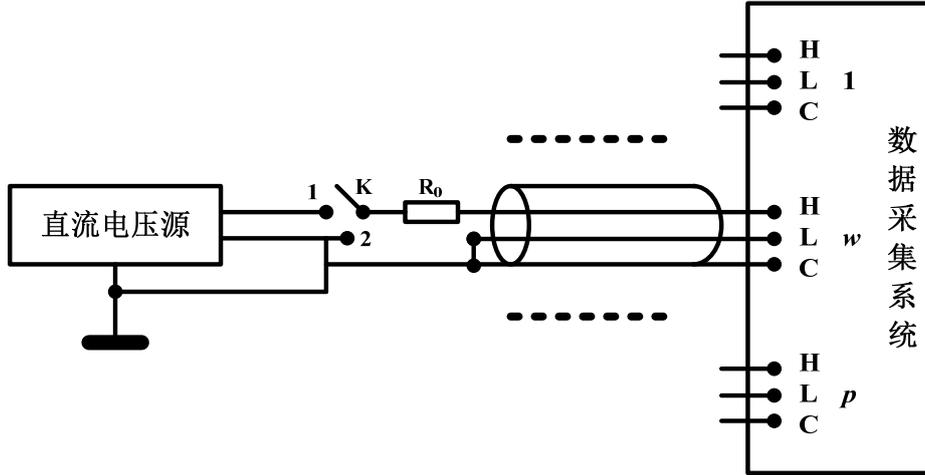


图 5 时间漂移校准接线图

将稳定性校准时间 t (一般为 8h) 分为 L ($L \geq 3$) 个检测时间点 t_j , ($j=0, 1, \dots, L-1$)。

6.7.2 设置采集方式(单通道或多通道)及系统最高采集速率状态。设置每通道采集数据个数 n ($n \geq 100$), 并选置量程。设定信号幅度 E (为测量范围上限或下限的 93.75~97.5%, 推荐值: 97.5%)。

6.7.3 在校准时间点 t_0 上执行如下测量:

接点 K 接 2, 将通道只接入 R_0 电阻, 启动采集, 记录采集数据 x_{0Ri} ($i=1, \dots, n$)。

接点 K 接 1, 将通道接入信号 E , 启动采集, 记录采集数据 x_{0Ei} ($i=1, \dots, n$)。按式(22)和(24)计算零点初始值 \bar{x}_{0R} 和增益初始值 $G_{(0)}$ 。

$$\bar{x}_{0R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{0Ri} \quad (22)$$

$$\bar{x}_{0E} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{0Ei} \quad (23)$$

$$G_{(0)} = \frac{\bar{x}_{0E} - \bar{x}_{0R}}{E} \quad (24)$$

6.7.4 等待, 在下一个校准时间点 t_j 上继续进行如下测量:

接点 K 接 2, 将通道只接入 R_0 电阻, 启动采集, 记录采集数据 x_{jRi} ($i=1, \dots, n$);

接点 K 接 1, 将通道接入信号 E , 启动采集, 记录采集数据 x_{jEi} ($i=1, \dots, n$);

按式(25)和(26)计算本时间点 t_j 上的零点时间漂移 $\Delta\bar{x}_{(j)}$ 和增益时间漂移 $\Delta G_{(j)}$ 。

零点时间漂移:
$$\Delta\bar{x}_{(j)} = \bar{x}_{jR} - \bar{x}_{0R} \quad (25)$$

增益时间漂移:
$$\Delta G_{(j)} = \frac{\bar{x}_{jE} - \bar{x}_{jR}}{E} - G_{(0)} \quad (26)$$

$$\bar{x}_{jR} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{jRi} \quad (27)$$

$$\bar{x}_{jE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{jEi} \quad (28)$$

$$G_{(j)} = \frac{\bar{x}_{jE} - \bar{x}_{jR}}{E}$$

6.7.5 重复执行 6.7.4，直至所有的校准时间点 t_j 测定完毕。

6.7.6 L 个校准时间点全部测量完毕后，按式(29)和(30)计算零点时间漂移特性参数和增益时间漂移特性参数。

零点时间漂移特性参数：

$$Z_S = \max \{ \Delta x_{(j)} \mid_{j=1, \dots, L-1} \} \quad (/h) \quad (29)$$

增益时间漂移特性参数：

$$G_S = \max \left\{ \left| \frac{\Delta G_{(j)}}{G_{(0)}} \right| \mid_{j=1, \dots, L-1} \right\} \quad (/h) \quad (30)$$

6.7.7 将校准结果记入附录 B 所述表中。

6.8 温度漂移特性

6.8.1 接线如图 6 所示，将具有高稳定度的直流电压源接入放在控温室的被校数据采集系统，选定测量通道。其中 R_0 为模拟信号源内阻的不平衡电阻，有特殊规定的系统，按规定执行。无特别要求时， R_0 取 $1k\Omega$ 。控温室的温度控制误差优于 $\pm 2^\circ\text{C}$ ，测温值的误差应小于 $\pm 0.2^\circ\text{C}$ 。

在温度稳定性的校准温度变化范围 T 内，较均匀地选择出 L （一般 $L \geq 3$ ，含工作温度上限、下限及中间温度 20°C ）个温度测试点 T_j ，（ $j=0, 1, \dots, L-1$ ）。

每一次检测时，每一通道对每个输入信号值采集 $n (\geq 100)$ 次。

设定控温室的温度，使之成为测试温度变化范围的最低（或最高）点，达到预定温度 T_0 之后等待两小时，使温度场充分稳定。

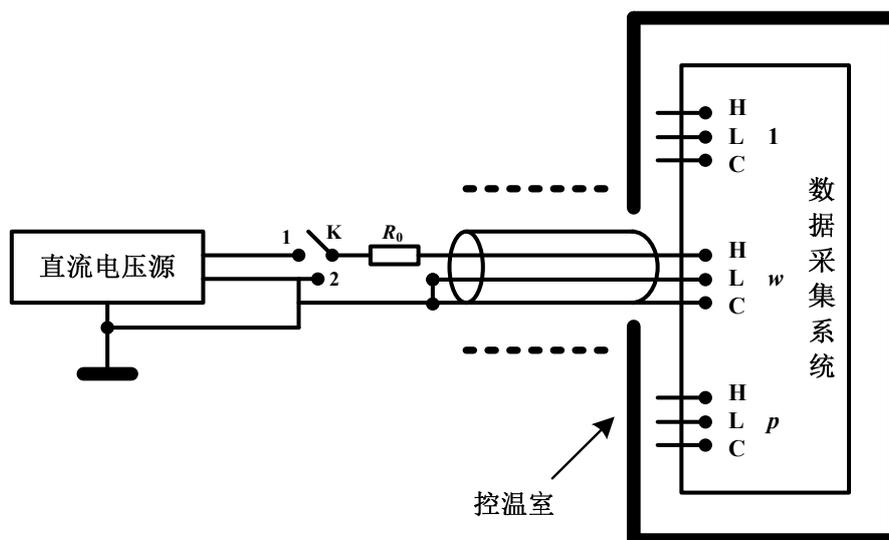


图 6 温度漂移校准接线图

6.8.2 设置测量通道的采集方式(单通道或多通道)及系统最高采集速率状态。选定校准量程，设置每通道采集数据个数 $n (\geq 100)$ 。

设定信号源信号幅度 E (为测量范围上限或下限的 93.75%~97.5%，推荐值 97.5%)。

6.8.3 在温度点 T_0 上，进行如下操作：

接点 K 接 2，将通道只接入 R_0 电阻，启动采集，记录采集数据 $x_{0Ri} (i=1, \dots, n)$ ；

接点 K 接 1，使通道接入信号 E ，启动采集，记录采集数据 $x_{0Ei} (i=1, \dots, n)$ ；

按式(31)和(32)计算零点初始值 \bar{x}_{0R} 和增益初始值 $G_{(0)}$ 。

$$\bar{x}_{0R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{0Ri} \quad (31)$$

$$\bar{x}_{0E} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{0Ei} \quad (32)$$

$$G_{(0)} = \frac{\bar{x}_{0E} - \bar{x}_{0R}}{E} \quad (33)$$

6.8.4 设定控温室的温度，使之达到测量温度变化范围的下一个温度点 T_j ，等待两小时，使温度场充分稳定。在此温度点 T_j 上，继续进行如下操作：

接点 K 接 2，使通道只接入 R_0 电阻，启动采集，记录采集数据 $x_{jRi} (i=1, \dots, n)$ ；

接点 K 接 1，使通道接入信号 E ，启动采集，记录采集数据 $x_{jEi} (i=1, \dots, n)$ ；

按式(34)和(35)计算本温度点 T_j 上的零点漂移 $\Delta x_{(j)}$ 和增益漂移 $\Delta G_{(j)}$ 。

零点温度漂移：
$$\Delta x_{(j)} = \bar{x}_{jR} - \bar{x}_{0R} \quad (34)$$

增益温度漂移：
$$\Delta G_{(j)} = \frac{\bar{x}_{jE} - \bar{x}_{0R}}{E} - G_{(0)} \quad (35)$$

$$\bar{x}_{jR} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{jRi} \quad (36)$$

$$\bar{x}_{jE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{jEi} \quad (37)$$

6.8.5 重复执行 6.8.4，直至在所有的温度点下操作完毕。

在 L 个温度点下全部操作结束后，计算出：

$$T = T_{L-1} - T_0 \quad (38)$$

6.8.6 按式(39)和(40)计算出零点温度漂移特性参数和增益温度漂移特性参数。

零点温度漂移特性参数：

$$Z_W = \max \{ \Delta x_{(j)} / T \mid j=1, \dots, L-1 \} (^\circ\text{C}) \quad (39)$$

增益温度漂移特性参数：

$$G_W = \max \left\{ \left| \frac{\Delta G_{(j)}}{T \cdot G_{(0)}} \right|_{j=1, \dots, L-1} \right\} (^\circ\text{C}) \quad (40)$$

6.8.7 将校准结果记入附录 B 所述表中。

6.9 有效位数

本项校准适用于对称双极性输入电路结构的通道。对不能直接接入正弦交流信号的单极性输入电路结构的通道，以及上下两个量限不对称的双极性输入电路结构的通道，可加载偏置正弦交流信号执行校准。

6.9.1 接线如图 7 所示，正弦信号源为低失真正弦交流标准源。选定被校数据采集系统测量通道。

6.9.2 选定被校数据采集系统通道量程，设置采集方式（单通道或多通道）及系统最高采集速率状态。设置每通道采集数据个数 $n (\geq 2000)$ 。

6.9.3 按式(41)选取低失真正弦信号的频率 f 。

$$f=N \cdot v_0/n \dots\dots\dots (41)$$

式中:

- v_0 ——通道采集速率标称值, Sa/s;
- N ——通道采集的 n 个数据中所含信号整周期个数。
- 这里, N 与 n 互质

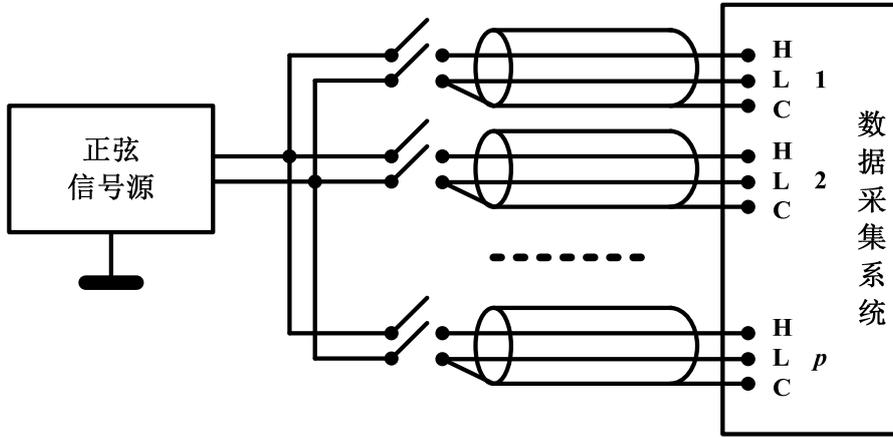


图 7 数据采集系统动态特性校准接线图

选取输入正弦信号峰值 E_p 约为覆盖量程 95% 的幅度值 (一般为量程的 90%~100% 之间); 加载信号, 启动采集, 记录 (2 个以上信号周期的) 采集数据 $x_i(i=1, \dots, n)$ 。按附录 D 所述的最小二乘法找出最佳拟合正弦信号:

$$a(t)=E \sin(2\pi ft+\theta)+D \dots\dots\dots (42)$$

- 式中: $a(t)$ ——拟合信号的瞬态值, V
- E ——拟合正弦信号的幅度, V
- f ——拟合正弦信号的频率值, Hz
- θ ——拟合正弦信号的初相位, rad
- D ——拟合信号的直流分量值, 作为直流偏移测量值, V

按式(43)计算实际回归残差有效值 ρ :

$$\rho = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - E \sin(2\pi ft_i + \theta) - D)^2} \dots\dots\dots (43)$$

- 式中: n ——每通道采集数据个数
- t_i ——第 i 个测量点的时刻 ($i=1, \dots, n$), s
- x_i —— t_i 时刻折合到通道输入端的采集数据 ($i=1, \dots, n$), V

按式(44)和(45)计算被校通道的有效位数 BD (bits) 和信噪失真比 SD (dB)。

$$BD = \log_2 \frac{E_r}{2\rho \cdot \sqrt{3}} \dots\dots\dots (44)$$

$$SD=6.02 \cdot BD+1.76 \dots\dots\dots (45)$$

式中: E_r ——采集通道量程

6.9.4 将校准结果记入附录 B 所述表中。

6.10 采集速率

6.10.1 方法 1: 整周期计点法

6.10.1.1 接线如图 8 所示, 信号发生器作为标准周期信号源, 输出信号为周期精确已知的方波(或正弦波)。

在被校数据采集系统同类通道中任选 m 个通道作为工作通道, 置为多通道采集状态。

在 m 个通道中任选一个通道接到信号发生器上, 将信号发生器输出的标准周期信号接入被校数据采集系统。其它通道输入进行短接。

选定采集通道的量程。设置每个通道采集数据个数 n (≥ 1000)。

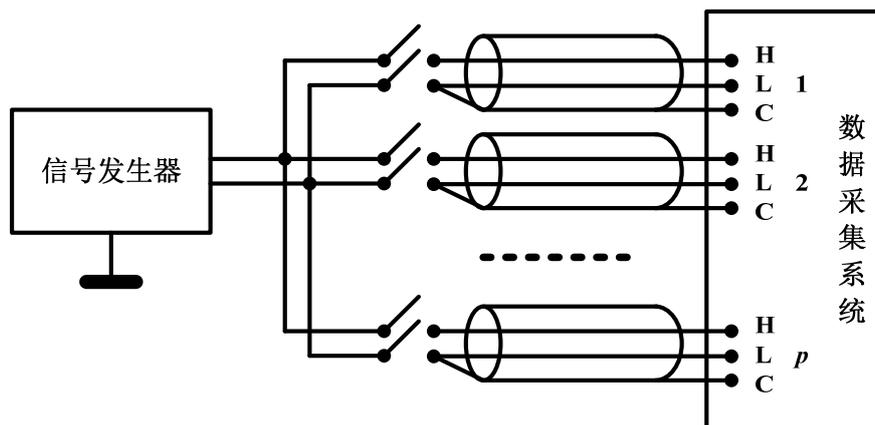


图 8 数据采集系统采集速率的校准接线图

6.10.1.2 设置信号的峰峰值, (一般为对应通道量程的 50%~100%), 按式(46)选择标准周期信号频率 f 。

$$\frac{v_{ix}}{3m} \geq f \geq \frac{2v_{ix}}{n \cdot m} \quad (46)$$

式中: v_{ix} ——被校准系统的最高多通道采集速率标称值

加载信号, 启动采集, 记录采集数据。

对采集数据进行分析, 统计出 N 个信号周期内采集数据个数 n_N , 按式(47)计算数据采集系统多通道采集速率 v_x 。按式(48)计算通道采集速率 v_d 。

$$v_x = m \cdot f \cdot n_N / N \quad (47)$$

$$v_d = f \cdot n_N / N \quad (48)$$

6.10.1.3 对于具有不同多通道采集速率的量程, 应分别进行校准。

6.10.1.4 将校准结果记入附录 B 所述表中。当 $m=1$ 时, 获得单通道采集速率校准结果。

6.10.2 方法 2: 正弦拟合法

6.10.2.1 接线如图 8 所示, 信号发生器输出频率精确已知的正弦信号, 在被校准数据采集系统的同类通道中任选 m 个通道作为工作通道, 置为多通道采集状态。

在 m 个通道中任选一个通道接入正弦信号, 其它通道进行输入短接。

选定采集通道的量程, 设置每个通道采集数据个数 n (≥ 1000)。

6.10.2.2 设置信号的峰峰值, (一般为对应通道量程的 50%~100%), 按式(46)选择标准正弦信号频率 f 。

加载信号, 启动采集。采集 (2 个以上信号周期的) 数据 $x_i (i=1, \dots, n)$, 输入计算机。

按附录 D 所述的最小二乘法获得最佳拟合正弦信号:

$$a(i) = E \cdot \sin(\omega i + \theta) + D \dots \dots \dots (49)$$

$$\omega = 2\pi \cdot f \cdot \Delta t$$

式中:

- $a(i)$ ——拟合信号的瞬时值, V;
 E ——拟合正弦信号的幅度, V;
 θ ——拟合正弦信号的初相位, rad;
 D ——拟合信号的直流分量值(直流偏移实测值), V;
 ω ——拟合正弦信号的离散角频率, rad;
 Δt ——采样时间间隔, s。

按式(50)计算通道采集速率 v_d 。

$$v_d = 2\pi f \omega \quad \dots\dots\dots (50)$$

按式(51)计算数据采集系统多通道采集速率 v_x 。

$$v_x = m \cdot v_d \quad (51)$$

6.10.2.3 对于具有不同采集速率的量程, 应分别进行校准。

6.10.2.4 将校准结果按附录 B 所示记录。当 $m=1$ 时, 获得单通道采集速率校准结果。

6.11 频带宽度

6.11.1 连线如图 7 所示, 选定测量通道接到正弦信号源上。

6.11.2 选定系统通道量程。设置系统为单通道采集方式。

选择通道采集数据个数 $n(\geq 1000)$ 。

设置信号源信号峰峰值 $2E_a$ (一般为对应通道量程的 50%~100%)。选择信号频率 f 为通道输入频带中部的一个频率点 f_m 上。

6.11.3 设置通道采集速率, 使得采集到的正弦波形完整、平滑。加载信号, 启动采集, 记录采集数据 $x_{0i}(i=1, \dots, n)$ 。

对采集数据进行处理, 按附录 F 所述方法获得正弦信号幅度 U_m 。计算幅度比 $g_m = U_m/E_a$ 。

6.11.4 以 f_m 为参考点, 增加信号频率 f 。其它均不变。

加载信号, 调整通道采集速率, 使采集到的正弦波形完整、平滑。启动采集, 记录采集数据 $x_{Hi}(i=1, \dots, n)$ 。对采集数据进行处理, 获得正弦信号幅度 U_H 。计算幅度比 $g_H = U_H/E_a$ 。寻找出使 $g_H/g_m = 0.707$ 的频率 f_H 即为通道上限频率。

6.11.5 若数据采集系统可采集直流信号, 则其输入通道频率下限为 $f_L = 0$ 。

若数据采集系统不能测量直流信号, 则:

以 f_m 为参考点, 降低信号频率 f 。加载信号, 调整通道采集速率, 使采集的正弦波形完整、平滑。启动采集, 记录采集数据 $x_{Li}(i=1, \dots, n)$ 。

对采集数据进行处理, 获得正弦信号幅度 U_L 。计算幅度比 $g_L = U_L/E_a$ 。寻找出使 $g_L/g_m = 0.707$ 的频率 f_L 即为通道下限频率。

6.11.6 按式(52)计算通道输入频带宽度 B 。

$$B = f_H - f_L \quad (52)$$

6.11.7 对于不同量程, 应分别进行校准。将校准结果按附录 B 所示记录。

6.12 幅频特性

6.12.1 连线如图 7 所示, 选择一个测量通道接到正弦信号源上。按照技术说明书选取被校准数据采集系统校准通道频率响应的频率测量范围 $[f_L, f_R]$, 并在此测量范围内近似均匀地选取校准频率点 $f_i (i=1, \dots, m)$, 且 $f_1 = f_L, f_m = f_R$ 。

6.12.2 选定数据采集系统通道量程。设置数据采集系统为单通道采集方式。

选择通道采集数据个数 $n(\geq 1000)$ 。

6.12.3 选择信号源信号峰峰值 $2E_a$ (一般为对应通道量程的 50%~100%)。选择信号频率 $f_i (i=1, \dots, m)$ 。

6.12.4 设置通道采集速率，使采集到的正弦波形完整、平滑。加载信号，启动采集，记录采集数据 $x_{0i}(i=1, \dots, n)$ 。

对采集数据进行处理，按附录 F 所述方法获得正弦信号幅度 U_i 。计算幅度比 $g_i=U_i/E_a$ 。

6.12.5 切换频率点，直至所有频率点的幅度比测量完毕。

6.12.6 以区间 $[f_L, f_R]$ 的中间频率 $f_c=(f_L+f_R)/2$ 为参考点，按式(53)计算获得序列 d_{gi} 。

$$d_{gi}=20\lg(g_i/g_c) \quad (53)$$

d_{gi} 随频率 f_i 而变化的规律即是频率特性测量结果。将校准结果按附录 B 所示记录。

6.13 瞬态响应

6.13.1 接线如图 8 所示，信号发生器输出方波信号，选定被校准数据采集系统校准通道。

6.13.2 选定被校数据采集通道量程，设置每通道采集数据个数 $n(\geq 2000)$ 。

设置被校系统为单通道采集方式，设置通道采集速率。

6.13.3 选取输入方波脉冲信号峰值 E_p 约为覆盖量程 95% 的幅度值（一般为量程的 90%~100%之间）；

按附录 E 选取方波脉冲信号的频率 f 。使其构成高分辨力等效采样序列，加载信号，启动采集，获得等效采样数据，并记录（2 个以上信号周期的）等效采样数据序列 $\{x_i\}(i=1, \dots, n)$ 。

6.13.4 从等效采样数据序列 $\{x_i\}(i=1, \dots, n)$ 中截取阶跃响应波形如图 9 所示。

读取图 9 所示上升时间 t_r 和 A 、 b 、 c 各值。瞬态参数按式(54)和式(55)分别计算。

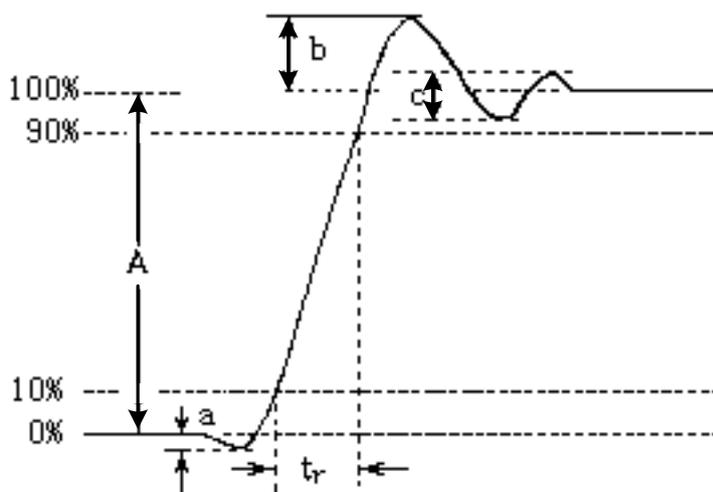


图 9 阶跃响应特性示意图

过冲:

$$S_b=b/A \quad \dots \quad (54)$$

顶部不平度:

$$\delta_f=c/A \quad \dots \quad (55)$$

6.13.5 将校准结果按附录 B 所示记录。

6.14 通道间延迟时间差

6.14.1 接线如图 10 所示，选定两个测量通道 A 与 B 接入正弦信号，通道 A 与 B 的连接电缆电气特性应一致。

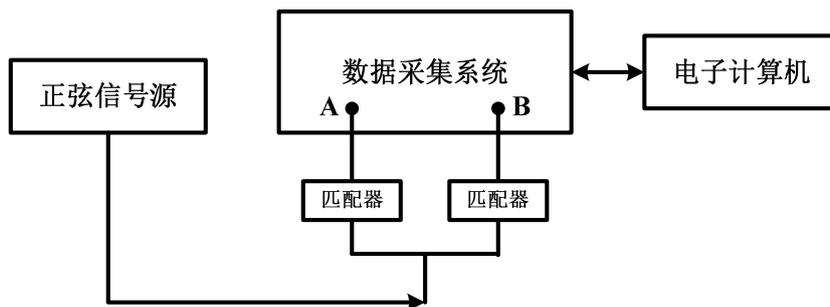


图 10 数据采集系统通道间延迟校准连线图

6.14.2 选定校准通道量程，设置每通道采集数据个数 $n(\geq 2000)$ 。

设置多通道采集方式及系统采集速率。

6.14.3 选择信号峰峰值为对应通道量程的 50%~90%；频率在频带中部，其值 f 满足式(41)要求。

加载信号，启动采集，获得通道 A 与 B 的采集数据 x_{Ai} 和 $x_{Bi}(i=1, \dots, n)$ ；输入计算机。

按最小二乘法对两个通道 A 与 B 的采集数据分别进行正弦波拟合，求出各自的拟合正弦信号：

$$U_A(t) = E_A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \theta_A) + D_A \dots \dots \dots (56)$$

$$U_B(t) = E_B \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \theta_B) + D_B \dots \dots \dots (57)$$

按式(58)计算通道 B 超前通道 A 的时间 t_{AB} 作为通道间延迟时间差。将校准结果按附录 B 所示记录。

$$t_{AB} = (\theta_B - \theta_A) / (2\pi \cdot f) \dots \dots \dots (58)$$

6.15 通道间串扰

6.15.1 接线如图 11 所示，选择采集顺序上连续的 2 个以上通道 $w, w+1, \dots$ 作为测量通道。通道 w 接到直流电压源上， $w+1, \dots$ 等通道接入电阻 R_0 。

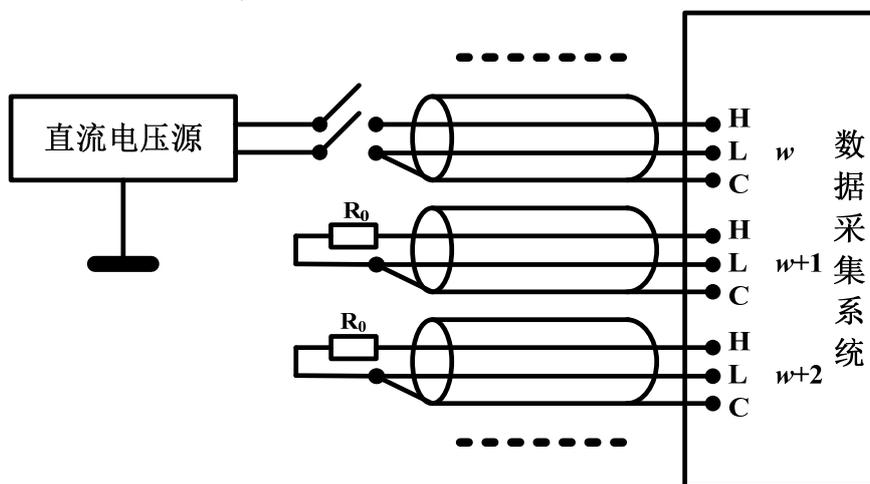


图 11 通道间串扰校准接线图

图中 R_0 为模拟信号源内阻的不平衡电阻，有特殊规定的系统，按规定执行。无特别要求时，取 $1k\Omega$ 。

6.15.2 通道 w 选取最大量程。通道 $w+1$ 等其它通道，均选最小量程。

设置系统为多通道最高采集速率状态，每一通道采集数据个数为 $n(\geq 100)$ 。

6.15.3 调置信号源，使通道 w 的输入信号 E 为零 ($E=0$)。启动采集，得通道 $j(j=w+1, \dots)$ 的采集数据 $x_{ji0} (i=1, \dots, n)$ ，按式(59)计算通道 j 的平均零点 \bar{x}_{j0} ：

$$\bar{x}_{j0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ji0} \quad (j=w+1, \dots) \quad (59)$$

调节信号源，使信号 E 为通道 w 的测量范围上限或下限 ($E=E_S$)，加载信号，启动采集，得通道 j 的采集数据 $x_{jim} (i=1, \dots, n)$ ，按式(60)计算通道 j 对通道 w 的串扰抑制比 $SCRR_j$ ：

$$SCRR_j = 20 \cdot \lg \left| \frac{E}{(\bar{x}_{jm} - \bar{x}_{j0}) / G_j} \right| \quad (j=w+1, \dots) \quad (60)$$

$$\bar{x}_{jm} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{jim} \quad (j=w+1, \dots) \quad (61)$$

其中， G_j ——测量通道 j 的增益值

6.15.4 系统的通道间串扰抑制比由 $SCRR_{w+1}$ 给出。将校准结果按附录 B 所示记录。

6.16 共模抑制比

本项校准只适用于能接入共模电压信号的数据采集系统通道，对于不能接入共模电压的通道，不能用本方法校准。

该项校准仅在最小量程下进行，相同类型的通道选择部分或全部进行校准。不同类型的通道，要分别校准。

6.16.1 直流共模抑制比

6.16.1.1 接线如图 12 所示。共模电压源为具有浮地功能的直流输出。 R_0 为模拟信号源内阻的不平衡电阻，有特殊规定的系统，按规定执行，无特别要求时，取 $1k\Omega$ 。 R 为限流电阻：

当额定最高共模电压 $U_{cmax} \leq 100V$ 时， $R=10k\Omega$ 。

当额定最高共模电压 $U_{cmax} > 100V$ 时： $R(\Omega)=100 \cdot U_{cmax}(V)$

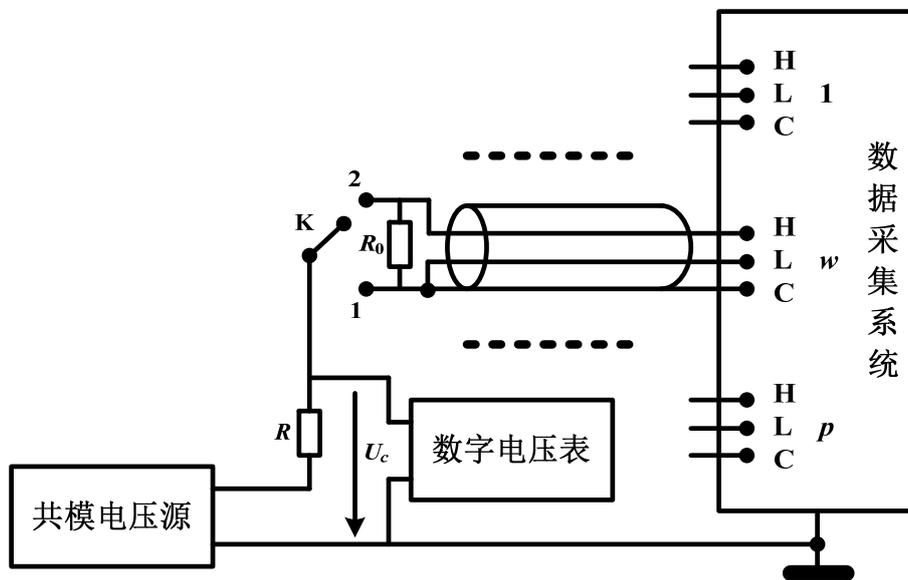


图 12 共模抑制比校准接线图

6.16.1.2 选择测量通道，选定通道量程，选择共模电压信号 U_c 值。

设置采集方式(单通道或多通道)及相应的系统最高采集速率状态，选择每通道采集数据个数 $n(\geq 100)$ 。

6.16.1.3 接点 K 接 1，调节共模电压源，使共模电压信号 $U_c=0$ ，启动采集，记录采集数据序列 $x_{0i}(i=1, \dots, n)$ ，计算均值 \bar{x}_0 。

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{0i} \quad (62)$$

启动采集, 将共模电压信号 U_c 幅度由小到大缓慢调节(但不可超过最大允许共模电压 U_{cmax}), 实时判别采集数据 x_{mi} , 直到 x_{mi} 与 x_{0i} 之间有超过最大允许误差的显著幅度变化, 或者 $U_c=U_{cmax}$ 时, 停止调节信号, 记为 U_{cm} , 采集并记录 U_{cm} 及采集数据 $x_{mi}(i=1, \dots, n)$, 计算均值 \bar{x}_m 。

$$\bar{x}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{mi} \quad (63)$$

按式(64)计算直流共模抑制比 $CMRR_{d1}$ 。

$$CMRR_{d1} = 20 \cdot \lg \left| \frac{U_{cm}}{(\bar{x}_m - \bar{x}_0) / G_0} \right| \quad (64)$$

式中, U_{cm} ——可使通道输出产生明显变化的直流共模电压($U_{cm} \leq$ 系统最高共模电压 U_{cmax})

G_0 ——测量通道的增益值

6.16.1.4 接点 K 接 2, 调节共模电压源, 使共模电压信号 $U_c=0$, 启动采集, 记录采集数据 $x_{0i}(i=1, \dots, n)$, 计算均值 \bar{x}_0 。

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{0i} \quad (65)$$

启动采集, 将共模电压信号 U_c 幅度由小到大缓慢调节(但不可超过最大允许共模电压 U_{cmax}), 实时判别采集数据 x_{mi} , 直到 x_{mi} 与 x_{0i} 之间有超过最大允许误差的显著幅度变化, 或者 $U_c=U_{cmax}$ 时, 停止调节信号, 记为 U_{cm} , 采集并记录 U_{cm} 及采集数据 $x_{mi}(i=1, \dots, n)$, 计算均值 \bar{x}_m 。

$$\bar{x}_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{mi} \quad (66)$$

按式(67)计算直流共模抑制比 $CMRR_{d2}$ 。

$$CMRR_{d2} = 20 \cdot \lg \left| \frac{U_{cm}}{(\bar{x}_m - \bar{x}_0) / G_0} \right| \quad (67)$$

式中, U_{cm} ——可使通道输出产生明显变化的直流共模电压($U_{cm} \leq$ 系统最高共模电压 U_{cmax})

G_0 ——测量通道的增益值

6.16.1.5 通道在该量程下的直流共模抑制比:

$$CMRR_d = \min [CMRR_{d1}, CMRR_{d2}] \quad (68)$$

6.16.1.6 将校准结果按附录 B 所示记录。

6.16.2 交流共模抑制比

6.16.2.1 接线如图 12 所示。共模电压源为交流输出。 R_0 为模拟信号源内阻的不平衡电阻, 有特殊规定的系统, 按规定执行, 无特别要求时, 取 $1k\Omega$ 。 R 为限流电阻:

当额定最高共模电压 $U_{cmax} \leq 100V$ 时, $R=10k\Omega$;

当额定最高共模电压 $U_{cmax} > 100V$ 时, $R(\Omega)=100 \cdot U_{cmax}(V)$ 。

6.16.2.2 选定被校数据采集通道, 确定采集通道量程, 选择共模电压信号 U_c 值。

置采集方式(单通道或多通道)及相应的系统最高采集速率状态。

6.16.2.3 选取信号频率 $f=50Hz$ (或其它特定值), 按式(69)选取每通道采集数据个数 $n(\geq 1000)$ 。

$$n = \frac{v \cdot M}{f} (\geq 1000) \quad (69)$$

式中： M ——保障 $n \geq 1000$ 及通道采集一个以上的共模信号整周期而选择的正整数 ($M = 2, 3, \dots$)

f ——交流信号频率

v ——通道采集速率

6.16.2.4 设置接点 K 接 1，调置共模电压源，在共模电压信号 $U_c=0$ 时，启动采集，记录采集数据 $x_{0i}(i=1, \dots, n)$ ，计算均值 \bar{x}_0 。

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{0i} \quad (70)$$

将共模电压信号 $U_c=0.5U_{cpp}\sin(2\pi ft+\phi)$ 接入通道中，并将 U_c 的峰峰值 U_{cpp} 由小到大缓慢调节(但不可超过最大允许共模电压 U_{cmax})，实时判别采集数据 x_{pi} ，直到 x_{mi} 与 x_{0i} 之间有超过最大允许误差的显著幅度变化，或者 $U_{cpp}=U_{cmax}$ 时，停止调节信号，记为 U_{cpp} ，采集并记录采集数据 $x_{pi}(i=1, \dots, n)$ 。并计算 \bar{x}_p ：

$$\bar{x}_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_{pi} - \bar{x}_0| \quad (71)$$

按式(72)计算出交流共模抑制比 $CMRR_{a1}$ 。

$$CMRR_{a1} = 20 \cdot \lg \left| \frac{U_{CPP}}{\pi \cdot \bar{x}_p / G_0} \right| \quad (72)$$

式中： U_{cm} ——可使通道输出产生明显变化的直流共模电压 ($U_{cm} \leq$ 系统最高共模电压 U_{cmax})

U_{cpp} ——通道交流共模电压峰峰值

f ——交流共模电压频率(一般 $f=50\text{Hz}$ ，如有特殊要求，亦可为其它值)

G_0 ——测量通道的增益值

6.16.2.5 设置接点 K 接 2，调置共模电压源，在共模电压信号 $U_c=0$ 时，启动采集，记录采集数据 $x_{0i}(i=1, \dots, n)$ ，按式(70)计算均值 \bar{x}_0 ；

将共模电压信号 $U_c=0.5U_{cpp}\sin(2\pi ft+\phi)$ 接入通道中，并将 U_c 的峰峰值 U_{cpp} 由小到大缓慢调节(但不可超过最大允许共模电压 U_{cmax})，实时判别采集数据 x_{pi} ，直到 x_{mi} 与 x_{0i} 之间有超过最大允许误差的显著幅度变化，或者 $U_{cpp}=U_{cmax}$ 时，停止调节信号，记为 U_{cpp} ，采集并记录采集数据 $x_{pi}(i=1, \dots, n)$ ，按式(71)计算均值 \bar{x}_p ；

按式(73)计算交流共模抑制比 $CMRR_{a2}$ 。

$$CMRR_{a2} = 20 \cdot \lg \left| \frac{U_{CPP}}{\pi \cdot \bar{x}_p / G_0} \right| \quad (73)$$

式中： U_{cm} ——可使通道输出产生明显变化的直流共模电压 ($U_{cm} \leq$ 系统最高共模电压 U_{cmax})

U_{cpp} ——通道交流共模电压峰峰值

f ——交流共模电压频率(一般 $f=50\text{Hz}$ ，如有特殊要求，亦可为其它值)

G_0 ——测量通道的增益值

6.16.2.6 通道在该量程下的交流共模抑制比 $CMRR_a$ ：

$$CMRR_a = \min [CMRR_{a1}, CMRR_{a2}] \quad (74)$$

6.16.2.7 将校准结果按附录 B 所示记录。

6.17 串模抑制特性

本项校准只在数据采集系统对某一个(或几个)频率点附近的信号(一般为供电电源电网的工作频率 50Hz)有特殊抑制要求时，才予以执行。此时，所述的被抑制的频率点在被校系统的频带以外，其它情况下，不进行本项校准。

6.17.1 接线如图 7 所示。选定测量通道，接入正弦信号源，选取信号频率 f 。

6.17.2 置采集方式（单通道或多通道）及相应的系统最高采集速率，按式(69) 选择每通道采集数据个数 $n(\geq 1000)$ 。设置通道量程。

6.17.3 调置标准信号源，选择输入信号 e 的幅度值 E_a ，（一般选择 $2E_a$ 为通道量程 E_r 的 93.75%~97.5%作校准测量点(推荐 97.5% E_r)）。

在输入信号 $e=0$ 时，启动采集，记录采集数据 $x_{0i}(i=1, \dots, n)$ ，计算均值 \bar{x}_0 ；

$$\bar{x}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{0i} \quad (75)$$

将输入信号 $e=E_a \sin(2\pi ft + \phi)$ 接入通道中，启动采集，记录采集数据 $x_{ai}(i=1, \dots, n)$ ，计算 \bar{x}_a ；

$$\bar{x}_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_{ai} - \bar{x}_0| \quad (76)$$

按式(77)计算通道在该量程下的串模抑制比 $NMRR$ 。

$$NMRR = 20 \cdot \lg \left| \frac{2 \cdot E_a}{\pi \cdot \bar{x}_a / G_0} \right| \quad (77)$$

式中： n ——每个通道采集数据个数

E_a ——通道输入的交流信号峰值

G_0 ——测量通道的增益值

6.17.4 变换量程，重复执行 6.17.3，直至所有量程校准完毕。将校准结果按附录 B 所示记录。

6.18 输入电阻

6.18.1 选择标准电阻 R 为与数据采集系统输入电阻标称量值 R_i 相当的值（一般为 $(0.1 \sim 10) R_i$ ），连线如图 13 所示，将被校采集通道通过标准电阻 R 接到直流电压信号源上。

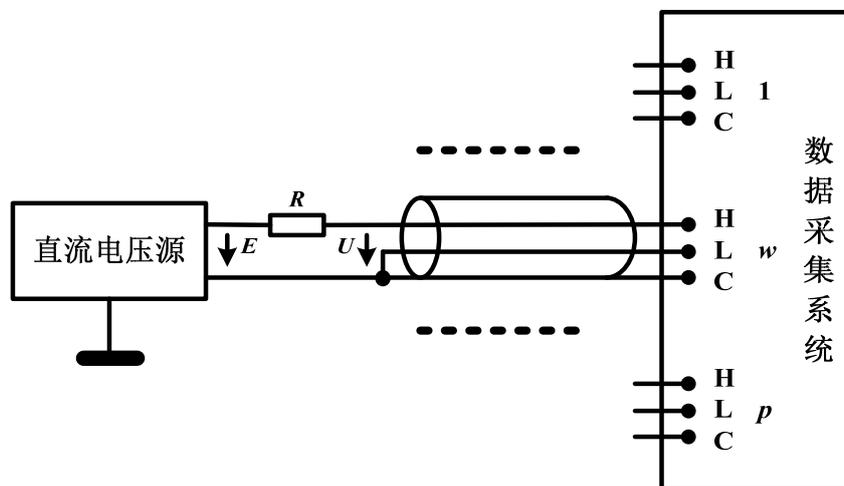


图 13 校准输入电阻的接线图

6.18.2 选定采集通道量程。选择通道采集数据个数 $n(\geq 1000)$ 。

设置系统为单通道采集方式及系统最高采集速率状态。

6.18.3 设置信号源信号幅度 $E=E_1$ ，加载信号，启动采集，记录采集数据 $x_{1j}(j=1, \dots, n)$ ，并计算 U_1 ；

$$U_1 = \frac{1}{n \cdot G_0} \sum_{j=1}^n x_{1j} \quad (78)$$

式中： n ——每个通道采集数据个数

G_0 ——测量通道的增益值

将信号幅度调置为 $E=E_2$ ，加载信号，启动采集，记录采集数据 $x_{2j}(j=1,\dots,n)$ ，并计算 U_2 ；

$$U_2 = \frac{1}{n \cdot G_0} \sum_{j=1}^n x_{2j} \quad (79)$$

按式(80)计算通道输入电阻 R_i 。将校准结果按附录 B 所示记录。

$$R_i = \frac{(U_2 - U_1) \cdot R}{E_2 - E_1 - U_2 + U_1} \quad (80)$$

6.18.4 对于不同的量程，应分别进行校准。

6.19 触发特性

数据采集系统的测量可通过多种形式触发，如被测信号触发、外触发、脉冲触发、软件指令触发、按键触发、内电路触发等等。本规范主要校准外脉冲触发中的一些特性。

6.19.1 触发延时

6.19.1.1 接线与设置

接线如图 14，选定数据采集系统的测量通道、量程，将正弦信号同时加载到测量通道和触发端。

设定通道采集速率为最高。设置通道采集数据个数 $n \geq 1000$ 。

设置外触发方式。选定触发信号频率 f 及幅度，使其处于可有效触发的状态，且触发延迟时间为 $\tau_0 < 1/(2f)$ 。

设定触发电平位于触发信号幅度中间部位，上升（或下降）沿触发。

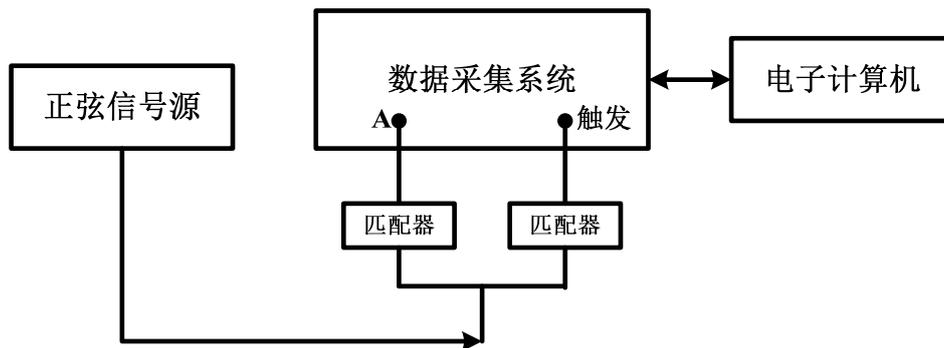


图 14 数据采集系统触发延迟校准连线图

6.19.1.2 测量及处理

设定触发延迟时间为 0，启动触发，获得正弦波采样序列 $x_{Ai}(i=1,\dots,n)$ ；输入计算机。

设定触发延迟时间为 τ_0 ，启动触发，获得正弦波采样序列 $x_{Bi}(i=1,\dots,n)$ ；输入计算机。

按最小二乘法对采集数据 x_{Ai} 、 x_{Bi} ($i=1,\dots,n$) 分别进行正弦拟合，获得各自的拟合正弦信号：

$$U_A(t) = E_A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \theta_A) + d_A \dots \dots \dots (81)$$

$$U_B(t) = E_B \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \theta_B) + d_B \dots \dots \dots (82)$$

触发延迟时间为 τ 按式(83)计算。将校准结果按附录 B 所示记录。

$$\tau = (\theta_B - \theta_A) / (2\pi \cdot f) \dots \dots \dots (83)$$

6.19.2 最窄触发脉宽

6.19.2.1 接线与设置

接线如图 15，脉冲信号源的脉冲宽度及幅度均可调，并能提供适当极性以保证边缘触发测量。

选定数据采集系统的测量通道、量程，将脉冲信号同时加载到测量通道和触发端。

设定通道采集速率为最高。设置通道采集数据个数 $n \geq 1000$ 。

设置外触发方式。选定触发信号频率 f 及幅度，使其处于可有效触发和测量状态。

设定触发电平位于触发脉冲信号幅度中间部位，设定触发边缘为上升（或下降）沿。

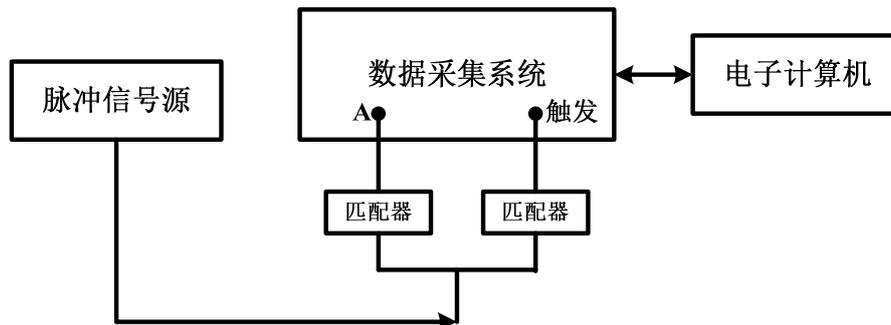


图 15 数据采集系统触发脉宽检查连线图

6.19.2.2 测量及处理

触发输入幅度不变，仅减小触发脉宽，找出使数据采集系统恰好可有效触发的输入脉冲宽度，即为外触发状态在该脉冲幅度下的最窄触发脉宽。将校准结果按附录 B 所示记录。

6.19.3 最小触发沿斜率

6.19.3.1 接线与设置

接线如图 16，三角波信号源的频率及幅度均可调，并能提供适当极性以保证边缘触发测量。

选定数据采集系统的测量通道、量程，将三角波信号同时加载到测量通道和触发端。

设定通道采集速率为最高。设置通道采集数据个数 $n \geq 1000$ 。

设置外触发方式。选定触发信号频率 f 及幅度，使其处于可有效触发和测量状态。

设定触发电平位于触发信号幅度中间部位，设定触发边缘为上升（或下降）沿。

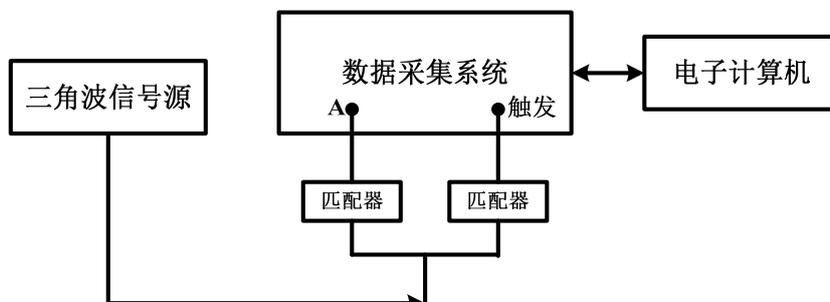


图 16 数据采集系统触发沿斜率检查连线图

6.19.3.2 测量及处理

触发信号频率不变，仅减少触发信号幅度，找出使数据采集系统恰好可有效触发的输入三角波信号幅度，然后，稍微增大一些信号幅度（如 5%）。

对于上述触发信号，仅降低信号频率，找出使数据采集系统恰好可有效触发的三角波信号频率，此时三角波的斜率即为外触发状态在该信号幅度及极性下的最小触发沿斜率。将校准结果按附录 B 所示记录。

6.19.4 触发（幅度）灵敏度

6.19.4.1 接线与设置

接线与设置同 6.19.2.1。

6.19.4.2 测量及处理

触发输入脉冲信号宽度不变，仅减小触发脉冲信号幅度，找出使数据采集系统恰好可有

效触发的脉冲信号幅度，即为外触发状态在该脉冲宽度下的最小触发信号幅度，称为触发灵敏度。将校准结果按附录 B 所示记录。

7 校准结果表达

数据采集系统校准后，出具校准证书，校准证书应包括校准结果及其测量不确定度。

校准证书至少应包含以下信息：

标题：“校准证书”；

实验室名称和地址；

进行校准的地点(如果与实验室的地址不同)；

证书的唯一性标识(如编号)，每页及总页数的标识；

客户的名称和地址；

被校对象的描述和明确标识；

进行校准的日期，如果与校准结果的有效性和应用有关时，应说明被校对象的接收日期；

如果与校准结果的有效性应用有关时，应对被校样品的抽样程序进行说明；

校准所依据的技术规范的标识，包括名称及代号；

本次校准所用测量标准的溯源性及有效性说明；

校准环境的描述；

校准结果及其测量不确定度的说明；

对校准规范的偏离的说明；

校准证书签发人的签名、职务或等效标识；

校准结果仅对被校对象有效的说明；

未经实验室书面批准，不得部分复制证书的声明。

8 复校时间间隔

复校时间间隔由用户根据使用情况自行确定，推荐为 1 年。

附录 A

原始记录格式

数据采集系统的原始记录为存储的数据文件，其记录格式复杂多样，为便于进行数据处理和校准结果运算，以及在出现技术争议时的校准过程再现。其校准数据文件原始记录格式统一为以文本方式存储，数据结构如下：

行号	示例	说明
1	数据采集系统 AH-V8型	被校仪器名称、型号
2	19-99-00-01	被校仪器序列号
3	西山计量测试研究所	送校单位
4	北昆仑	检定员
5	交直流校准器	标准器名称、型号
6	正弦交流电压	校准信号类型
7	V	校准信号量纲
8	1	校准通道顺序中的首通道号
9	-10~10	通道量程范围，V
10	2020/8/3	校准日期
11	6:54:02	校准时间
12	20	环境温度，°C
13	80	相对湿度，%
14	12	A/D位数，bit
15	0	直流偏置，V
16	8.000	信号幅度，V
17	25	扫描工作通道数目
18	19.000	信号频率，Hz
19	0	初始相位，°
20	5000	通道采集速率，Sa/s
21	9	数据文件所属的工作通道号
22	1000	数据个数
23	校准数据	校准数据
...	
1022	校准数据	

实际记录文件内部格式示例：

数据采集系统 AH-V8型

19-99-00-01

西山计量测试研究所

北昆仑

交直流校准器

正弦交流电压

V

1
-10~10
2020/8/3
6:54:02
20
80
12
0
8.000
25
19.000
0
5000
9
1000
7.993164
7.988281
7.978516
7.958984
.....
.....
1.733398
1.918945
2.104492
2.285156
2.470703

这是从通道 1 开始的 25 个通道扫描采集方式中，通道 9 的采集数据记录格式。

附录 B

校准证书内页格式

线性度、增益、直流偏移、最大允许误差、噪声标准差校准结果：

通道	通道数	量程	通道速率	数据	线性度	最大允许误差	偏移误差	标准差	增益误差
(1)	(1)	(V)	(Sa/s)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)	(1)

增益校准结果：

通道	通道数	量程	输入	频率	通道速率	数据	标称增益	实测增益	相对误差
(1)	(1)	(V)	(V)	(Hz)	(Sa/s)	(1)	(1)	(1)	(1)

直流偏移校准结果：

通道	通道数	量程	输入	频率	通道速率	数据	标称直流偏移	实测直流偏移	偏移误差
(1)	(1)	(V)	(V)	(Hz)	(Sa/s)	(1)	(V)	(V)	(V)

最大允许误差校准结果：

通道	通道数	量程	幅度	频率	通道速率	数据	采集幅度	系统误差	标准差	最大允许误差
(1)	(1)	(V)	(V)	(Hz)	(Sa/s)	(1)	(V)	(1)	(1)	(1)

随机噪声校准结果：

通道	通道数	量程	幅度	频率	通道速率	数据	输入状态	幅度误差	噪声标准差
(1)	(1)	(V)	(V)	(Hz)	(Sa/s)	(1)	(1)	(1)	(V)

时间漂移校准结果：

通道	通道数	量程	幅度	频率	通道速率	数据	零点	增益	零漂	增益漂	时间
(1)	(1)	(V)	(V)	(Hz)	(Sa/s)	(1)	(V)	(1)	(1)	(1)	(h)

温度漂移校准结果：

通道	通道数	量程	幅度	频率	通道速率	数据	零点	增益	零漂	增益漂	温差
(1)	(1)	(V)	(V)	(Hz)	(Sa/s)	(1)	(V)	(1)	(1/°C)	(1/°C)	(°C)

有效位数校准结果：

通道	通道数	量程	幅度	频率	通道速率	数据	有效位数	信噪失真比	直流偏移
(1)	(1)	(V)	(V)	(Hz)	(Sa/s)	(1)	(Bits)	(dB)	(1)

采集速率校准结果：

通道	通道数	量程	幅度	频率	通道速率	数据	速率测值	系统速率	速率误差
(1)	(1)	(V)	(V)	(Hz)	(Sa/s)	(1)	(Sa/s)	(Sa/s)	(1)

频带宽度校准结果：

通道	通道数	量程	参考幅度	参考频率	通道速率	数据	频带宽度
(1)	(1)	(V)	(V)	(Hz)	(Sa/s)	(1)	(Hz)

幅频特性校准结果:

通道	通道数	量程	幅度	频率	通道速率	数据	相对增益
(1)	(1)	(V)	(V)	(Hz)	(Sa/s)	(1)	(dB)

瞬态响应校准结果:

通道	通道数	量程	幅度	频率	通道速率	数据	上升时间	过冲	顶部不平度
(1)	(1)	(V)	(V)	(Hz)	(Sa/s)	(1)	(s)	(1)	(1)

通道间延迟校准结果:

通道	通道数	量程	幅度	频率	通道速率	数据	参比通道	通道延迟时间差
(1)	(1)	(V)	(V)	(Hz)	(Sa/s)	(1)	(1)	(s)

通道间串扰校准结果:

通道	通道数	量程	干扰幅度	频率	通道速率	数据	干扰通道	通道间串扰
(1)	(1)	(V)	(V)	(Hz)	(Sa/s)	(1)	(1)	(dB)

共模抑制比校准结果:

通道	通道数	量程	幅度	频率	通道速率	数据	总通道	共模抑制比
(1)	(1)	(V)	(V)	(Hz)	(Sa/s)	(1)	(1)	(dB)

串模抑制比校准结果:

通道	通道数	量程	幅度	频率	通道速率	数据	总通道	串模抑制比
(1)	(1)	(V)	(V)	(Hz)	(Sa/s)	(1)	(1)	(dB)

输入电阻校准结果:

通道	通道数	量程	幅度	频率	通道速率	数据	采集幅度	标准电阻	输入电阻
(1)	(1)	(V)	(V)	(Hz)	(Sa/s)	(1)	(V)	(Ω)	(Ω)

通道触发延时、最窄触发脉宽

触发通道号	标称触发延时	实测触发延时	标称最窄脉宽	实测最窄脉宽
(1)	(s)	(s)	(s)	(s)

通道最小触发沿斜率、触发灵敏度

触发通道号	标称最小斜率	实测最小斜率	标称灵敏度	实测灵敏度
(1)	(V/s)	(V/s)	(V)	(V)

附录 C

测量不确定度评定

C.1 端基线性度的测量不确定度评定

C.1.1 测量原理与方法

如图 C.1.1 所示, 在数据采集系统的测量范围(E_L, E_H)内, 数据采集系统是线性系统, 假设其输入 E 和输出 y 关系满足公式:

$$y(E)=G_0 \cdot E+D_0 \quad (\text{C.1.1})$$

其中, G_0 为通道直流增益; D_0 为通道的直流偏移。

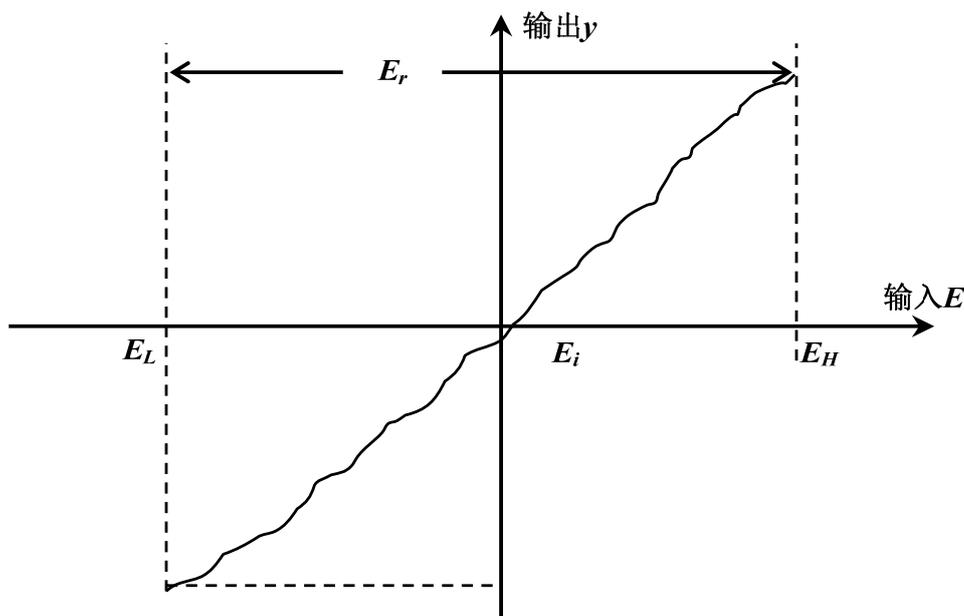


图 C.1.1 数据采集系统输入输出特性

给测量通道依次输入符合公式(C.1.2)的信号 $E_i(i=1, \dots, m)$:

$$E_L < E_1 < E_2 < \dots < E_m < E_H \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (\text{C.1.2})$$

式中, E_L 为通道的测量范围下限; E_H 为通道的测量范围上限; 量程 $E_r=|E_H-E_L|$ 。

分别用对应 E_i 的采集数据 $y_{ij}(j=1, \dots, n)$ 。按式 (C.1.3) 计算各平均值:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n y_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (\text{C.1.3})$$

测量值 y_{ij} 的实验方差:

$$s^2(y_{ij}) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

均值 \bar{y}_i 的实验方差:

$$s^2(\bar{y}_i) = \frac{s^2(y_{ij})}{n}$$

与上述理想公式(C.1.1)的关系相比, 实际中使用经过(E_1, \bar{y}_1)和(E_m, \bar{y}_m)两个测量端点的直线作为基准直线, 称为端基直线, 它所对应的 G 和 D :

$$G = \frac{\bar{y}_m - \bar{y}_1}{E_m - E_1} \quad (\text{C.1.4})$$

$$D = \frac{E_m \cdot \bar{y}_1 - E_1 \cdot \bar{y}_m}{E_m - E_1} \quad (\text{C.1.5})$$

其它测量点与端基直线间的偏差，作为非线性误差，则，非线性误差：

$$L_i = \frac{\bar{y}_i - G \cdot E_i - D}{G \cdot E_r} = \frac{\bar{y}_i(E_m - E_1) - E_m \bar{y}_1 + E_1 \bar{y}_m}{(\bar{y}_m - \bar{y}_1)E_r} - \frac{E_i}{E_r} \quad (i=2, \dots, m-1) \quad (\text{C.1.6})$$

线性度：

$$L = L_{\max} = \max \left| \frac{\bar{y}_j - G \cdot E_j - D}{G \cdot E_r} \right|_{j=2, \dots, m-1} \quad (\text{C.1.7})$$

C.1.2 测量不确定度模型

从式(C.1.6)~(C.1.7)可见，线性度 L 的测量不确定度 $u(L)$ 的主要来源：

a) 直流标准信号 E_i 的不确定度 $u(E_i)$ ；

b) 被校系统测量过程引入的不确定度 $u(\bar{y}_i)$ 。这一分量主要包含两部分内容： E_i 的测量重复性引入的不确定度 $u_1(\bar{y}_i)$ ；被校系统分辨力 (A/D 位数) 引入的不确定度 $u_2(\bar{y}_i)$ 。显然，两者不相关，有：

$$u(\bar{y}_i) = \sqrt{u_1^2(\bar{y}_i) + u_2^2(\bar{y}_i)}$$

由式(C.1.7)得：

$$dL = \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial E_i} dE_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \bar{y}_i} d\bar{y}_i = \sum_{i=1}^m (c_L(E_i) \cdot dE_i + c_L(\bar{y}_i) \cdot d\bar{y}_i) \quad (\text{C.1.8})$$

设， $L=L_j$ ，则，

1) 当 $L_j > 0$ 时，由式(C.1.7)得灵敏系数：

$$c_L(E_1) = \frac{\partial L}{\partial E_1} = \frac{\partial L_j}{\partial E_1} = \frac{\bar{y}_m - \bar{y}_j}{(\bar{y}_m - \bar{y}_1)E_r} \quad (\text{C.1.9})$$

$$c_L(E_j) = \frac{\partial L}{\partial E_j} = \frac{\partial L_j}{\partial E_j} = -\frac{1}{E_r} \quad (\text{C.1.10})$$

$$c_L(E_i) = \frac{\partial L}{\partial E_i} = \frac{\partial L_j}{\partial E_i} \Big|_{i \neq j} = 0 \quad (\text{C.1.11})$$

$$c_L(E_m) = \frac{\partial L}{\partial E_m} = \frac{\partial L_j}{\partial E_m} = \frac{\bar{y}_j - \bar{y}_1}{(\bar{y}_m - \bar{y}_1)E_r} \quad (\text{C.1.12})$$

$$c_L(\bar{y}_1) = \frac{\partial L}{\partial \bar{y}_1} = \frac{\partial L_j}{\partial \bar{y}_1} = \frac{(\bar{y}_j - \bar{y}_m)(E_m - E_1)}{(\bar{y}_m - \bar{y}_1)^2 E_r} \quad (\text{C.1.13})$$

$$c_L(\bar{y}_j) = \frac{\partial L}{\partial \bar{y}_j} = \frac{\partial L_j}{\partial \bar{y}_j} = \frac{E_m - E_1}{(\bar{y}_m - \bar{y}_1)E_r} \quad (\text{C.1.14})$$

$$c_L(\bar{y}_i) = \frac{\partial L}{\partial \bar{y}_i} = \frac{\partial L_j}{\partial \bar{y}_i} \Big|_{i \neq j} = 0 \quad (\text{C.1.15})$$

$$c_L(\bar{y}_m) = \frac{\partial L}{\partial \bar{y}_m} = \frac{\partial L_j}{\partial \bar{y}_m} = \frac{(\bar{y}_1 - \bar{y}_j)(E_m - E_1)}{(\bar{y}_m - \bar{y}_1)^2 E_r} \quad (\text{C.1.16})$$

2) 当 $L_j < 0$ 时，由式(C.1.7)得灵敏系数：

$$c_L(E_i) = \frac{\partial L}{\partial E_i} = -\frac{\partial L_j}{\partial E_i}; \quad c_L(\bar{y}_i) = \frac{\partial L}{\partial \bar{y}_i} = -\frac{\partial L_j}{\partial \bar{y}_i}$$

由于测量值 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 对于输入 X_i 的测量值 x_i ($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$) 不确定度传递公式为：

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) u(x_i, x_j)} \quad (C.1.17)$$

$$u(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \quad (C.1.18)$$

式中： x_i 为输入 X_i 的测量值； x_j 为输入 X_j 的测量值，($i \neq j$ ，则 $X_i \neq X_j$)；

$u(x_i)$ 为 x_i 的标准不确定度； $u(x_j)$ 为 x_j 的标准不确定度，($i \neq j$)；

$u(x_i, x_j)$ 为 x_i 、 x_j 的协方差估计值，($i \neq j$)；

$r(x_i, x_j)$ 为 x_i 、 x_j 的相关系数估计值，($i \neq j$)；

本检定装置测量过程中，对于相关系数的估计值，当 ($i \neq j$) 时，显然有：

$r(E_i, E_j) = 0$ ；不同的输入值之间不相关；

$r(\bar{y}_i, \bar{y}_j) = 0$ ；不同的测量值之间可以认为是不相关；

$r(E_i, \bar{y}_i) = r(\bar{y}_i, E_i) = 1$ ，($i=1, \dots, m$)；测量值与其输入值之间可以认为是完全相关；

则有，线性度 L 的合成标准不确定度：

$$u_c(L) = \left(\sum_{i=1}^m c_L^2(E_i) u^2(E_i) + \sum_{i=1}^m c_L^2(\bar{y}_i) u^2(\bar{y}_i) + 2 \sum_{i=1}^m c_L(E_i) c_L(\bar{y}_i) u(E_i) u(\bar{y}_i) \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_L(E_i) \cdot u(E_i) + c_L(\bar{y}_i) \cdot u(\bar{y}_i))^2} \quad (C.1.19)$$

其有效自由度 $\nu_{eff} = m - (\text{独立变量个数}) = m - 3$ 。

C.1.3 测量数据及处理

以 TDS784D 数字存储示波器为被校系统，其测量范围设为 $(E_L, E_H) = (-5V, 5V)$ ，A/D 位数为 $b=8$ ；则，校准仪器的输入值 E_i 按上述公式(C.1.2)给出并列表如表 C.1.2 所示，各输入值 E_i 的允许误差极限 $\pm \Delta_i$ 由标准仪器说明书获得，对应的被校系统测量值的平均值 \bar{y}_i 和均值方差 $s^2(\bar{y}_i)$ 和不确定度 $u(\bar{y}_i)$ 可相应获得如表 C.1.2 所示。

a) 直流标准信号的不确定度，按照 B 类评价方法获得。假设信号 E_i 的误差在其允许误差极限 $[-\Delta_i, +\Delta_i]$

内服从均匀分布，则误差区间半宽度 $a_i = (\Delta_i - (-\Delta_i))/2$ ， E_i 的不确定度 $u(E_i) = \frac{a_i}{\sqrt{3}}$ 。 Δ_i 与 $-\Delta_i$ 由说明书得知如表

C.1.1 所示。

表 C.1.1：直流标准电压 E_i 的误差限

量 程	分辨力	允许误差极限 $[-\Delta_i, +\Delta_i]$
220mV	10nV	$\pm 0.0009\%$ 读值 $\pm 0.8\mu V$
2.2V	100nV	$\pm 0.0008\%$ 读值 $\pm 1.2\mu V$
11V	1 μV	$\pm 0.0008\%$ 读值 $\pm 4\mu V$

b) 被校系统测量重复性引入的不确定度，按照 A 类评价方法获得，在测量点 E_i 上有：

$$u_1(\bar{y}_i) = s(\bar{y}_i)$$

由系统测量范围 $(E_L, E_H) = (-5V, 5V)$ ，A/D 位数为 $b=8$ ；得量化误差为 $LSB = (E_H - E_L)/2^b = 39.0625 \text{ mV}$ ，设分辨力造成的误差在 $(-0.5 \times LSB, 0.5 \times LSB)$ 内服从均匀分布，则 $a = 0.5 \times LSB = 19.53125 \text{ mV}$ ，

$u_2(\bar{y}_i) = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0.0112767 \text{ V}$ ，由 $u_1(\bar{y}_i)$ 、 $u_2(\bar{y}_i)$ 合成 $u(\bar{y}_i)$ 。

表 C.1.2：范围 $(-5V, 5V)$ 内测量数据及处理结果

序号 i	E_i (V)	a_i (V)	$u(E_i)$ (V)	\bar{y}_i (V)	n	$s(\bar{y}_i)$ (V)	$u(\bar{y}_i)$ (V)
1	-4.6875	4.15×10^{-5}	2.40×10^{-5}	-4.58998	1000	1.55×10^{-3}	1.14×10^{-2}
2	-4.0625	3.65×10^{-5}	2.11×10^{-5}	-3.97004	1000	1.64×10^{-3}	1.14×10^{-2}
3	-3.4375	3.15×10^{-5}	1.82×10^{-5}	-3.33784	1000	1.55×10^{-3}	1.14×10^{-2}

4	-2.8125	2.65×10^{-5}	1.53×10^{-5}	-2.70728	1000	1.55×10^{-3}	1.14×10^{-2}
5	-2.1875	1.87×10^{-5}	1.08×10^{-5}	-2.09078	1000	1.52×10^{-3}	1.14×10^{-2}
6	-1.5625	1.37×10^{-5}	7.91×10^{-6}	-1.45432	1000	1.52×10^{-3}	1.14×10^{-2}
7	-0.9375	8.70×10^{-6}	5.02×10^{-6}	-0.834939	1000	1.49×10^{-3}	1.14×10^{-2}
8	-0.3125	3.70×10^{-6}	2.14×10^{-6}	-0.202492	1000	1.49×10^{-3}	1.14×10^{-2}
9	0.3125	3.70×10^{-6}	2.14×10^{-6}	0.418474	1000	1.61×10^{-3}	1.14×10^{-2}
10	0.9375	8.70×10^{-6}	5.02×10^{-6}	1.04458	1000	1.55×10^{-3}	1.14×10^{-2}
11	1.5625	1.37×10^{-5}	7.91×10^{-6}	1.67738	1000	1.61×10^{-3}	1.14×10^{-2}
12	2.1875	1.87×10^{-5}	1.08×10^{-5}	2.29848	1000	1.52×10^{-3}	1.14×10^{-2}
13	2.8125	2.65×10^{-5}	1.53×10^{-5}	2.92457	1000	1.61×10^{-3}	1.14×10^{-2}
14	3.4375	3.15×10^{-5}	1.82×10^{-5}	3.55496	1000	1.52×10^{-3}	1.14×10^{-2}
15	4.0625	3.65×10^{-5}	2.11×10^{-5}	4.18852	1000	1.52×10^{-3}	1.14×10^{-2}
16	4.6875	4.15×10^{-5}	2.40×10^{-5}	4.80928	1000	1.58×10^{-3}	1.14×10^{-2}

C.1.4 合成不确定度计算

由表 C.1.2 所述数据, 按照上述公式(C.1.4)~(C.1.5)可得直流增益和直流偏移的最小二乘估计值为:

$$G=1.0026; D=0.110V。$$

按照上述公式(C.1.6)~(C.1.7)可得线性度的估计值为:

$$L=7.3 \times 10^{-4}, j=5。$$

按式(C.1.13)~(C.1.16)可得各灵敏系数如下表 C.1.3 所示:

表 C.1.3: 测量数据对应的灵敏系数

序号 i	E_i (V)	\bar{y}_i (V)	$c_L(E_i)$	$c_L(\bar{y}_i)$
1	-4.6875	-4.58998	7.341×10^{-2}	-7.322×10^{-2}
2	-4.0625	-3.97004	0	0
3	-3.4375	-3.33784	0	0
4	-2.8125	-2.70728	0	0
5	-2.1875	-2.09078	-0.1000	-9.974×10^{-2}
6	-1.5625	-1.45432	0	0
7	-0.9375	-0.834939	0	0
8	-0.3125	-0.202492	0	0
9	0.3125	0.418474	0	0
10	0.9375	1.04458	0	0
11	1.5625	1.67738	0	0
12	2.1875	2.29848	0	0
13	2.8125	2.92457	0	0
14	3.4375	3.55496	0	0
15	4.0625	4.18852	0	0
16	4.6875	4.80928	2.659×10^{-2}	-2.652×10^{-2}

由表 C.1.2 和表 C.1.3 所示的数据, 按照公式(C.1.19)计算出线性度的合成标准不确定度:

$$u_c(L) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_L(E_i) \cdot u(E_i) + c_L(\bar{y}_i) \cdot u(\bar{y}_i))^2} = 1.44 \times 10^{-3}$$

其有效自由度 $\nu_{eff} = m - 3 = 13$ 。

特别是, 当测量系统理想时, 其不确定度为 $u(\bar{y}_i) = 0$, 则仅由信号源带来的线性度的合成标准不确定度

为:

$$u_c(L_{idea}) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_L(E_i) \cdot u(E_i))^2} = 2.2 \times 10^{-6}$$

它们代表了检定装置评价线性度指标的能力极限。

C.1.5 扩展不确定度

令置信概率 $P=95\%$ ，由其有效自由度 $\nu_{eff}=13$ ，查 t 分布表得包含因子 $k=t_p(\nu_{eff})=t_{0.95}(14)=2.16$ ，则，扩展不确定度:

$$U(L)=k \times u_c(L)=2.16 \times 1.44 \times 10^{-3}=3.1 \times 10^{-3}$$

C.1.6 测量结果的最终表述

端基直线法获得的端基线性度:

$$L_0=L \pm U(L) = 7.3 \times 10^{-4} \pm 3.1 \times 10^{-3} \quad (k=2.16, P=95\%)$$

其中， \pm 后面是扩展不确定度 $U(L)$ ，它的包含因子为 $k=2.16$ ，是由有效自由度 $\nu_{eff}=13$ ，置信概率 $P=95\%$ ，由 t 分布表查得。

C.2 端基增益、直流偏移的测量不确定度评定

C.2.1 测量原理与方法

如图 C.2.1 所示，在数据采集系统的测量范围(E_L , E_H)内，假设其输入 E 和输出 y 关系满足式:

$$y(E)=G_0 \cdot E + D_0 \quad (C.2.1)$$

其中， G_0 为通道直流增益； D_0 为通道的直流偏移。

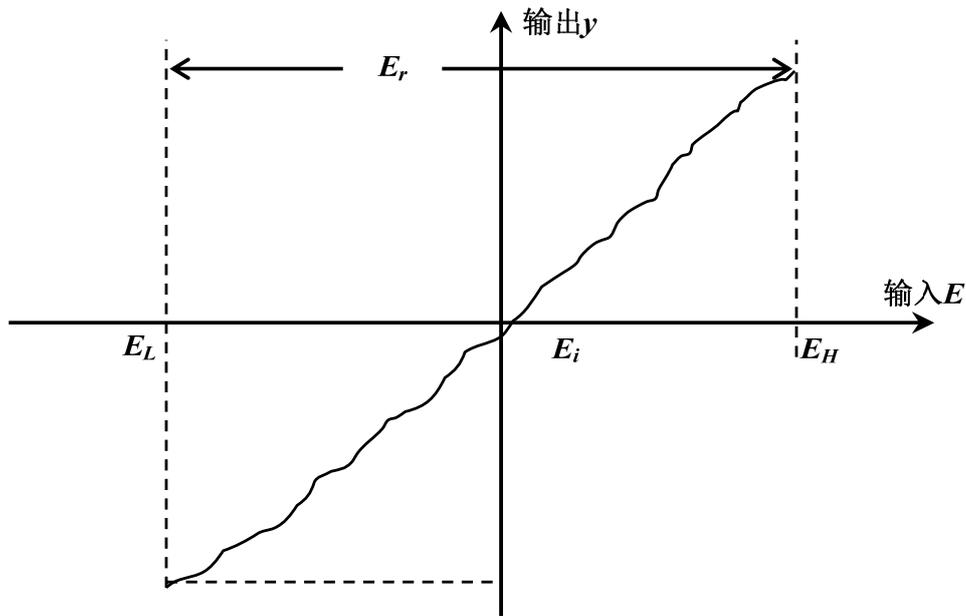


图 C.2.1 数据采集系统输入输出特性

给测量通道依次输入符合式(C.2.2)的直流标准信号 $E_i(i=1, m)$:

$$E_L < E_1 < E_m < E_H \quad (i=1, m) \quad (C.2.2)$$

式中， E_L 为通道的测量范围下限； E_H 为通道的测量范围上限；量程 $E_r=|E_H-E_L|$ 。

分别用对应 E_i 的测量数据 $y_{ij}(j=1, \dots, n)$ 。按式(C.2.3)计算各平均值:

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n y_{ij} \quad (i=1, m) \quad (C.2.3)$$

测量值 y_{ij} 的实验方差:

$$s^2(y_{ij}) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

均值 \bar{y}_i 的实验方差:

$$s^2(\bar{y}_i) = \frac{s^2(y_{ij})}{n}$$

与上述理想式(C.2.1)的关系相比, 实际中使用经过 (E_1, \bar{y}_1) 和 (E_m, \bar{y}_m) 两个测量端点的直线作为基准直线, 称为端基直线, 它所对应的直流增益 G 和直流偏移 D :

$$G = \frac{\bar{y}_m - \bar{y}_1}{E_m - E_1} \quad (\text{C.2.4})$$

$$D = \frac{E_m \cdot \bar{y}_1 - E_1 \cdot \bar{y}_m}{E_m - E_1} \quad (\text{C.2.5})$$

C.2.2 测量不确定度模型

从式(C.2.4)~(C.2.5)可见, 直流增益 G 和直流偏移 D 的测量不确定度的主要来源:

a) 直流标准信号 E_i 的不确定度 $u(E_i)$;

b) 测量系统测量过程引入的不确定度 $u(\bar{y}_i)$ 。这一分量主要包含两部分内容: E_i 的测量重复性引入的不确定度 $u_1(\bar{y}_i)$; 测量分辨率 (A/D 位数) 引入的不确定度 $u_2(\bar{y}_i)$ 。显然, 两者不相关:

$$u(\bar{y}_i) = \sqrt{u_1^2(\bar{y}_i) + u_2^2(\bar{y}_i)} \quad (\text{C.2.6})$$

由式(C.2.4)、(C.2.5)得:

$$\begin{aligned} dG &= \frac{\partial G}{\partial E_1} dE_1 + \frac{\partial G}{\partial E_m} dE_m + \frac{\partial G}{\partial \bar{y}_1} d\bar{y}_1 + \frac{\partial G}{\partial \bar{y}_m} d\bar{y}_m \\ &= c_G(E_1) dE_1 + c_G(E_m) dE_m + c_G(\bar{y}_1) d\bar{y}_1 + c_G(\bar{y}_m) d\bar{y}_m \end{aligned} \quad (\text{C.2.7})$$

$$\begin{aligned} dD &= \frac{\partial D}{\partial E_1} dE_1 + \frac{\partial D}{\partial E_m} dE_m + \frac{\partial D}{\partial \bar{y}_1} d\bar{y}_1 + \frac{\partial D}{\partial \bar{y}_m} d\bar{y}_m \\ &= c_D(E_1) dE_1 + c_D(E_m) dE_m + c_D(\bar{y}_1) d\bar{y}_1 + c_D(\bar{y}_m) d\bar{y}_m \end{aligned} \quad (\text{C.2.8})$$

其中, 灵敏系数:

$$c_G(\bar{y}_m) = \frac{\partial G}{\partial \bar{y}_m} = \frac{1}{E_m - E_1} \quad (\text{C.2.9})$$

$$c_G(\bar{y}_1) = \frac{\partial G}{\partial \bar{y}_1} = \frac{-1}{E_m - E_1} \quad (\text{C.2.10})$$

$$c_G(E_m) = \frac{\partial G}{\partial E_m} = \frac{-G}{E_m - E_1} \quad (\text{C.2.11})$$

$$c_G(E_1) = \frac{\partial G}{\partial E_1} = \frac{G}{E_m - E_1} \quad (\text{C.2.12})$$

$$c_D(\bar{y}_m) = \frac{\partial D}{\partial \bar{y}_m} = \frac{-E_1}{E_m - E_1} \quad (\text{C.2.13})$$

$$c_D(\bar{y}_1) = \frac{\partial D}{\partial \bar{y}_1} = \frac{E_m}{E_m - E_1} \quad (\text{C.2.14})$$

$$c_D(E_m) = \frac{\partial D}{\partial E_m} = \frac{E_1 G}{E_m - E_1} \quad (\text{C.2.15})$$

$$c_D(E_1) = \frac{\partial D}{\partial E_1} = \frac{-E_m G}{E_m - E_1} \quad (C.2.16)$$

由于测量值 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 对于输入 X_i 的测量值 x_i ($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$) 不确定度传递式为:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right) u(x_i, x_j)} \quad (C.2.17)$$

$$u(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \quad (C.2.18)$$

式中: x_i 为输入 X_i 的测量值; x_j 为输入 X_j 的测量值, ($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$);

$u(x_i)$ 为 x_i 的标准不确定度; $u(x_j)$ 为 x_j 的标准不确定度, ($i \neq j$);

$u^2(x_i, x_j)$ 为 x_i 、 x_j 的协方差估计值, ($i \neq j$);

$r(x_i, x_j)$ 为 x_i 、 x_j 的相关系数估计值, ($i \neq j$);

本测量过程中, 对于相关系数的估计值, 当 ($i \neq j$) 时, 显然有:

$r(E_i, E_j) = 0$; 不同的输入值之间不相关;

$r(\bar{y}_i, \bar{y}_j) = 0$; 不同的测量值之间可以认为是不相关;

$r(E_i, \bar{y}_i) = r(\bar{y}_i, E_i) = 1$, ($i=1, m$); 测量值与其输入值之间可以认为是完全相关;

则有, 直流增益 G 和直流偏移 D 的合成标准不确定度:

$$u_c(G) = \left(\sum_{i=1}^m c_G^2(E_i) u^2(E_i) + \sum_{i=1}^m c_G^2(\bar{y}_i) u^2(\bar{y}_i) + 2 \sum_{i=1}^m c_G(E_i) c_G(\bar{y}_i) u(E_i) u(\bar{y}_i) \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_G(E_i) \cdot u(E_i) + c_G(\bar{y}_i) \cdot u(\bar{y}_i))^2} \quad (C.2.19)$$

$$u_c(D) = \left(\sum_{i=1}^m c_D^2(E_i) u^2(E_i) + \sum_{i=1}^m c_D^2(\bar{y}_i) u^2(\bar{y}_i) + 2 \sum_{i=1}^m c_D(E_i) c_D(\bar{y}_i) u(E_i) u(\bar{y}_i) \right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_D(E_i) \cdot u(E_i) + c_D(\bar{y}_i) \cdot u(\bar{y}_i))^2} \quad (C.2.20)$$

C.2.3 测量数据及处理

以 TDS784D 数字存储示波器作为测量系统, 其测量范围设为 $(E_L, E_H) = (-5V, 5V)$, A/D 位数为 $b=8$; 则输入值 E_i 按上述式(C.2.2)给出并列表如表 C.2.1 所示, 各输入值 E_i 的允许误差极限 $\pm \Delta_i$ 由标准仪器说明书获得, 对应的测量系统测量值的平均值 \bar{y}_i 和均值方差 $s^2(\bar{y}_i)$ 和不确定度 $u(\bar{y}_i)$ 可相应获得如表 C.2.1 所示。

表 C.2.1: 范围(-5V, 5V)内测量数据及处理结果

序号 i	E_i (V)	a_i (μV)	$u(E_i)$ (μV)	\bar{y}_i (V)	n	$s(\bar{y}_i)$ (mV)	$u(\bar{y}_i)$ (mV)
1	-4.6875	41.5	24.0	-4.58998	1000	1.55	11.4
m	4.6875	41.5	24.0	4.80928	1000	1.58	11.4

a) 直流标准信号的不确定度, 按照 B 类评价方法获得。假设信号 E_i 的误差在其允许误差极限 $[-\Delta_i, +\Delta_i]$

内服从均匀分布, 则误差区间半宽度 $a_i = (\Delta_{i+} - \Delta_{i-})/2$, E_i 的不确定度 $u(E_i) = \frac{a_i}{\sqrt{3}}$, 其自由度为 $\nu(E_i) = \infty$; Δ_{i+} 与

Δ_{i-} 由说明书得如表 2 所示。

表 C.2.2: 直流标准电压 E_i 的误差限

量 程	分辨力	允许误差极限 $[-\Delta_{i-}, +\Delta_{i+}]$
220mV	10nV	$\pm 0.0009\%$ 读值 $\pm 0.8\mu V$
2.2V	100nV	$\pm 0.0008\%$ 读值 $\pm 1.2\mu V$
11V	1 μV	$\pm 0.0008\%$ 读值 $\pm 4\mu V$

b) 测量系统测量重复性引入的不确定度,按照 A 类评价方法获得,在测量点 E_i 上有: $u_1(\bar{y}_i) = s(\bar{y}_i)$, 其自由度为 $\nu_1(\bar{y}_i) = n-1=999$;

由系统测量范围(E_L, E_H)= $(-5V, 5V)$, A/D 位数为 $b=8$; 得量化误差为 $LSB=(E_H-E_L)/2^b = 39.0625 \text{ mV}$, 设分辨力造成的误差在 $(-0.5 \times LSB, 0.5 \times LSB)$ 内服从均匀分布, 则 $a=0.5 \times LSB = 19.53125 \text{ mV}$, $u_2(\bar{y}_i) = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0.0112767 \text{ V}$, 其自由度为 $\nu_2(\bar{y}_i) = \infty$; 由 $u_1(\bar{y}_i)$ 、 $u_2(\bar{y}_i)$ 合成 $u(\bar{y}_i)$, 其自由度为 $\nu(\bar{y}_i)=1043$ 。

C.2.4 合成不确定度计算

由表 C.2.1 所述数据,按照上述式(C.2.4)~(C.2.5)可得直流增益和直流偏移的最小二乘估计值为:

$$G=1.0026; D=0.110V。$$

按式(C.2.9)~(C.2.16)可得各灵敏系数:

$$c_G(\bar{y}_m) = 8/75 \quad (\text{V}^{-1})$$

$$c_G(\bar{y}_1) = -8/75 \quad (\text{V}^{-1})$$

$$c_G(E_m) = -8.0208/75 \quad (\text{V}^{-1})$$

$$c_G(E_1) = 8.0208/75 \quad (\text{V}^{-1})$$

$$c_D(\bar{y}_m) = -0.5$$

$$c_D(\bar{y}_1) = 0.5$$

$$c_D(E_m) = 0.5013$$

$$c_D(E_1) = -0.5013$$

由表 C.2.1 的数据和上述灵敏系数,按式(C.2.19)、(C.2.20)计算直流增益和直流偏移的合成标准不确定度:

$$u_c(G) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_G(E_i) \cdot u(E_i) + c_G(\bar{y}_i) \cdot u(\bar{y}_i))^2} = 1.716 \times 10^{-3}$$

$$u_c(D) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_D(E_i) \cdot u(E_i) + c_D(\bar{y}_i) \cdot u(\bar{y}_i))^2} = 8.044 \times 10^{-3} \text{ (V)}$$

特别是,当测量系统理想时,其不确定度为 $u(\bar{y}_i)=0$, 则仅由信号源带来的直流增益和直流偏移的合成标准不确定度为:

$$u_c(G_{idea}) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_G(E_i) \cdot u(E_i))^2} = 3.6 \times 10^{-6}$$

$$u_c(D_{idea}) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_D(E_i) \cdot u(E_i))^2} = 1.7 \times 10^{-5} \text{ (V)}$$

它们代表了文中所用的标准信号源评价直流增益和直流偏移指标的能力极限。

C.2.5 扩展不确定度

$$\text{由 } \nu_{eff}(G) = \frac{u_c^4(G)}{\sum_i \frac{c_{Gi}^4 u_i^4}{\nu_i}} \approx 2925;$$

$$\nu_{eff}(D) = \frac{u_c^4(D)}{\sum_i \frac{c_{Di}^4 u_i^4}{\nu_i}} \approx 2925;$$

令置信概率 $P=95\%$, 由有效自由度 $\nu_{eff}(G)=2925$, 查 t 分布表得包含因子 $k=t_p(\nu_{eff})=t_{0.95}(2925)=1.96$, 则, 扩展不确定度:

$$U(G)=k \times u_c(G)=1.96 \times 1.716 \times 10^{-3}=3.4 \times 10^{-3}$$

由有效自由度 $\nu_{eff}(D)=2925$ ，查 t 分布表得包含因子 $k=t_p(\nu_{eff})=t_{0.95}(2925)=1.96$ ，则，扩展不确定度：

$$U(D)=k \times u_c(D)=1.96 \times 8.044 \times 10^{-3}=1.6 \times 10^{-2} \text{ (V)}$$

C.2.6 测量结果的最终表述

端基直线法获得的端基直流增益和直流偏移：

$$G_0=G \pm U(G)=1.0026 \pm 0.0034 \quad (k=1.96, P=95\%)$$

$$D_0=D \pm U(D)=0.110 \pm 0.016 \text{ (V)} \quad (k=1.96, P=95\%)$$

其中，±后面分别是扩展不确定度 $U(G)$ 、 $U(D)$ ，它们的包含因子均为 $k=1.96$ ，是由有效自由度 $\nu_{eff}=2925$ ，置信概率 $P=95\%$ ，由 t 分布表查得。

C.3 最大允许误差测量不确定度的评定

C.3.1 测量原理与方法

在数据采集系统的测量范围(E_L, E_H)内，假设其输入 E 和输出 y 关系满足公式

$$y(E)=E \dots\dots\dots (C.3.1)$$

对测量通道依次输入符合式(C.3.2)的信号 $E_i(i=1, \dots, m)$

$$E_L < E_1 < E_2 < \dots < E_i < \dots < E_m < E_H \dots\dots\dots (C.3.2)$$

式中， E_L ——为通道的测量范围下限； E_H ——为通道的测量范围上限；量程 $E_r=|E_H-E_L|$ 。

分别用对应 E_i 的采集数据 $y_{ij}(j=1, \dots, n)$ 。按式(C.3.3)计算各平均值

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n y_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, m) \dots\dots\dots (C.3.3)$$

测量值 y_{ij} 的实验方差

$$S^2(y_{ij}) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

均值 \bar{y}_i 的实验方差

$$S^2(\bar{y}_i) = \frac{S^2(y_{ij})}{n}$$

对应 E_i 的随机噪声标准差 σ_i 。

$$\sigma_i = S(y_{ij}) \dots\dots\dots (C.3.4)$$

系统误差

$$\nabla_i = \bar{y}_i - G_0 \cdot E_i \dots\dots\dots (C.3.5)$$

式中， G_0 为采集通道额定增益

输入 E_i 点上的测量最大允许误差

$$A_i = |\bar{y}_i - G_0 \cdot E_i| \dots\dots\dots (C.3.6)$$

量程 E_r 内的测量最大允许误差

$$A = \max(A_i)_{i=1, \dots, m} \dots\dots\dots (C.3.7)$$

以引用相对值表述的最大允许误差为

$$A_{ir} = \frac{A_i}{G_0 \cdot E_r} = \frac{|\bar{y}_i - G_0 \cdot E_i|}{G_0 \cdot E_r}; \quad A_r = \frac{A}{G_0 \cdot E_r}$$

C.3.2 测量不确定度模型

从式(C.3.6)可见，设 $i=M$ 时 A_i 最大，则，最大允许误差 A 的测量不确定度 $u(A)$ 的主要来源：

- a) 直流标准信号 E_M 的不确定度 $u(E_M)$;
- b) 测量系统测量过程引入的不确定度 $u(\bar{y}_M)$ 。这一分量主要包含两部分内容： E_M 的测量

重复性引入的不确定度 $u_1(\bar{y}_M)$ ；测量系统分辨力（A/D 位数）引入的不确定度 $u_2(\bar{y}_M)$ 。显然，两者不相关。

$$u(\bar{y}_M) = \sqrt{u_1^2(\bar{y}_M) + u_2^2(\bar{y}_M)}$$

1) $\nabla_i > 0$ 情况

当 $\nabla_i > 0$ 时，得灵敏系数：

$$c(\bar{y}_i) = \frac{\partial A}{\partial \bar{y}_i} = 1 \dots\dots\dots (C.3.8)$$

$$c(E_i) = \frac{\partial A}{\partial E_i} = -1 \dots\dots\dots (C.3.9)$$

2) $\nabla_i < 0$ 情况

当 $\nabla_i < 0$ 时，得灵敏系数：

$$c(\bar{y}_i) = \frac{\partial A}{\partial \bar{y}_i} = -1 \dots\dots\dots (C.3.10)$$

$$c(E_i) = \frac{\partial A}{\partial E_i} = 1 \dots\dots\dots (C.3.11)$$

设 $A=A_M$ ，则由式(C.3.6)得

$$dA = \frac{\partial A}{\partial \bar{y}_M} d\bar{y}_M + \frac{\partial A}{\partial E_M} dE_M \dots\dots\dots (C.3.12)$$

由于测量值 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 对于输入 X_i 的测量值 x_i ($i \neq j$ ，则 $X_i \neq X_j$) 的不确定度传递公式为：

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right) u(x_i, x_j)} \dots\dots\dots (C.3.13)$$

$$u(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \dots\dots\dots (C.3.14)$$

式中， x_i ——为输入 X_i 的测量值； x_j ——为输入 X_j 的测量值，($i \neq j$ ，则 $X_i \neq X_j$)；

$u(x_i)$ ——为 x_i 的标准不确定度； $u(x_j)$ ——为 x_j 的标准不确定度，($i \neq j$)；

$u(x_i, x_j)$ ——为 x_i 、 x_j 的协方差估计值，($i \neq j$)；

$r(x_i, x_j)$ ——为 x_i 、 x_j 的相关系数估计值，($i \neq j$)；

本测量过程中，对于相关系数的估计值，显然有：

$r(E_M, \bar{y}_M) = r(\bar{y}_M, E_M) = 1$ ，($i=1, \dots, m$)；测量值的算术平均值 \bar{y}_M 与其输入值 E_M 之间可以认为是完全相关；

则有，最大允许误差 A 的合成标准不确定度

$$\begin{aligned} u_c(A) &= \sqrt{\sum_{i=1}^m c_L^2(E_i) u^2(E_i) + \sum_{i=1}^m c_L^2(\bar{y}_i) u^2(\bar{y}_i) + 2 \sum_{i=1}^m c_L(E_i) c_L(\bar{y}_i) u(E_i) u(\bar{y}_i)} \\ &= \sqrt{c^2(\bar{y}_M) u^2(\bar{y}_M) + c^2(E_M) u^2(E_M) + 2 \cdot c(\bar{y}_M) c(E_M) u(\bar{y}_M) u(E_M)} \\ &= \sqrt{u^2(\bar{y}_M) + u^2(E_M) - 2 \cdot u(\bar{y}_M) u(E_M)} \\ &= \sqrt{(u(\bar{y}_M) - u(E_M))^2} = |u(\bar{y}_M) - u(E_M)| \dots\dots\dots (C.3.15) \end{aligned}$$

同理，系统误差 ∇_M 的合成标准不确定度

$$u_c(\nabla_M) = |u(\bar{y}_M) - u(E_M)| \dots\dots\dots (C.3.16)$$

C.3.3 测量数据及处理

以某型数字示波器为测量系统，其测量范围设为 $(E_L, E_H) = (-5V, 5V)$ ，A/D 位数为 $b=8\text{bits}$ ，

则测量系统的输入值 E_i 按上述式(C.3.2)给出, 并如表 C.3.2 所示, 各输入值 E_i 的允许误差极限 $\pm\Delta_i$ 由标准仪器说明书获得, 对应的测量系统测量值的平均值 \bar{y}_i 和均值方差 $S^2(\bar{y}_i)$ 和不确定度 $u(\bar{y}_i)$ 可相应获得, 如表 C.3.2 所示。

a) 直流标准信号的不确定度, 按照 B 类评价方法获得。假设信号 E_i 的误差在其允许误差极限 $[-\Delta_{i-}, +\Delta_{i+}]$ 内服从均匀分布, 则误差区间半宽度 $a_i = (\Delta_{i+} - \Delta_{i-})/2$, E_i 的不确定度 $u(E_i) = \frac{a_i}{\sqrt{3}}$, 其自由度 $\nu(E_i) = \infty$ 。 Δ_{i+} 与 Δ_{i-} 由说明书可知, 如表 C.3.1 所示。

b) 测量系统测量重复性引入的不确定度, 按照 A 类评价方法获得, 在测量点 E_i 上有:

$$u_1(\bar{y}_i) = S(\bar{y}_i)$$

其自由度 $\nu_1(\bar{y}_i) = n-1$ 。

由系统测量范围 $(E_L, E_H) = (-5V, 5V)$, A/D 位数为 $b=8$ bits, 得量化误差为 $LSB = (E_H - E_L)/2^b = 39.0625mV$ 。设分辨力造成的误差在 $(-0.5 \times LSB, 0.5 \times LSB)$ 内服从均匀分布, 则 $a = 0.5 \times LSB = 19.5mV$, $u_2(\bar{y}_i) = \frac{a}{\sqrt{3}} = 11.3mV$, 其自由度 $\nu_2(\bar{y}_i) = \infty$ 。由 $u_1(\bar{y}_i)$ 和 $u_2(\bar{y}_i)$ 合成 $u(\bar{y}_i)$ 。

表 C.3.1: 直流标准电压 E_i 的允许误差极限

量程	分辨力	允许误差极限 $[-\Delta_{i-}, +\Delta_{i+}]$
220mV	10nV	$\pm 0.0009\%$ 读值 $\pm 0.8\mu V$
2.2V	100nV	$\pm 0.0008\%$ 读值 $\pm 1.2\mu V$
11V	1 μV	$\pm 0.0008\%$ 读值 $\pm 4\mu V$

c) 测量值的实验标准偏差 $S(y_{ij})$ 的不确定度 $u(S)$ 可由下式获得

$$u(S(y_{ij})) = \frac{S(y_{ij})}{\sqrt{2(n-1)}}$$

其自由度 $\nu(S(y_{ij})) = \infty$ 。

表 C.3.2 范围 $(-5V, 5V)$ 内测量数据及处理结果 ($n=1000$)

i	E_i (V)	$u(E_i)$ (μV)	\bar{y}_i (V)	$S(y_{ij})$ (mV)	$u(\bar{y}_i)$ (mV)	$u(S(y_{ij}))$ (mV)	∇_i (mV)	$u_c(\nabla_i)$ (mV)	A_i (mV)	$u_c(A_i)$ (mV)
1	-4.6875	24.0	-4.58998	49	11.4	1.1	97.5	11	97.5	11
2	-4.0625	21.1	-3.97004	52	11.4	1.2	92.5	11	92.5	11
3	-3.4375	18.2	-3.33784	49	11.4	1.1	99.7	11	99.7	11
4	-2.8125	15.3	-2.70728	49	11.4	1.1	105.2	11	105.2	11
5	-2.1875	10.8	-2.09078	48	11.4	1.1	96.7	11	96.7	11
6	-1.5625	7.91	-1.45432	48	11.4	1.1	108.1	11	108.1	11
7	-0.9375	5.02	-0.834939	47	11.4	1.1	102.6	11	102.6	11
8	-0.3125	2.14	-0.202492	47	11.4	1.1	110.0	11	110.0	11
9	0.3125	2.14	0.418474	51	11.4	1.1	106.0	11	106.0	11
10	0.9375	5.02	1.04458	49	11.4	1.1	107.1	11	107.1	11
11	1.5625	7.91	1.67738	51	11.4	1.1	114.9	11	114.9	11
12	2.1875	10.8	2.29848	48	11.4	1.1	111.0	11	111.0	11
13	2.8125	15.3	2.92457	51	11.4	1.1	112.1	11	112.1	11
14	3.4375	18.2	3.55496	48	11.4	1.1	117.5	11	117.5	11
15	4.0625	21.1	4.18852	48	11.4	1.1	126.0	11	126.0	11
16	4.6875	24.0	4.80928	50	11.4	1.1	121.8	11	121.8	11

C.3.4 合成不确定度计算

各个测量点上的系统误差及其合成标准不确定度由式(C.3.5)和式(C.3.16)分别计算, 测量最大允许误差及其合成标准不确定度由式(C.3.7)和(C.3.15)分别计算, 其数值详见表 C.3.2。

由表 C.3.2 所述数据, 按照上述式(C.3.6)可得 $i=15$ 时, 试验点获得最大误差值, 则最大允

许误差估计值为： $A=A_{15}=0.126\text{V}$ 。此时，系统误差估计值为： $\nabla=\nabla_{15}=0.126\text{V}$ ；测量值的实验标准偏差为： $S(y_{ij})=0.048\text{V}$ 。

相应地，最大允许误差 A 的合成标准不确定度为： $u_c(A)=u_c(A_{15})=0.011\text{V}$ ，其有效自由度：

$$v_{\text{eff}}(A) = \frac{u_c^4(A)}{\frac{u_1^4(\bar{y}_M)}{v_1(\bar{y}_M)} + \frac{u_2^4(\bar{y}_M)}{v_2(\bar{y}_M)} + \frac{u^4(E_M)}{v(E_M)}} = \frac{0.011^4}{\frac{u_1^4(\bar{y}_M)}{999} + 0 + 0} \approx 2.75 \times 10^6;$$

系统误差 ∇ 的合成标准不确定度为： $u_c(\nabla)=u_c(\nabla_{15})=0.011\text{V}$ ，其有效自由度：

$$v_{\text{eff}}(\nabla) = \frac{u_c^4(\nabla)}{\frac{u_1^4(\bar{y}_M)}{v_1(\bar{y}_M)} + \frac{u_2^4(\bar{y}_M)}{v_2(\bar{y}_M)} + \frac{u^4(E_M)}{v(E_M)}} = \frac{0.011^4}{\frac{u_1^4(\bar{y}_M)}{999} + 0 + 0} \approx 2.75 \times 10^6;$$

测量值的实验标准偏差 $S(y_{ij})$ 的不确定度为： $u(S(y_{ij}))=1.1 \times 10^{-3}$ ，其有效自由度 $v(S(y_{ij}))=\infty$ 。

C.3.5 扩展不确定度

选取置信概率 $P=95\%$ ，则由有效自由度 $v_{\text{eff}}(A)$ ，从 t 分布表查得包含因子 $k=1.960$ ，则可得，最大允许误差的扩展不确定度

$$U(A)=k \times u_c(A)=1.960 \times 0.011\text{V}=0.022\text{V}$$

选取置信概率 $P=95\%$ ，则由有效自由度 $v_{\text{eff}}(\nabla)$ ，从 t 分布表查得包含因子 $k=1.960$ ，则可得，系统误差的扩展不确定度

$$U(\nabla)=k \times u_c(\nabla)=1.960 \times 0.011\text{V}=0.022\text{V}$$

C.3.6 测量结果的最终表述

最大允许误差 A_0

$$A_0=A \pm U(A)=(0.126 \pm 0.022)\text{V} \quad (k=1.960, P=95\%)$$

其中， \pm 后面是扩展不确定度 $U(A)$ ，它的包含因子为 $k=1.960$ ，是置信概率 $P=95\%$ 的情况下，由 t 分布表查得。

系统误差 ∇_0

$$\nabla_0=\nabla \pm U(\nabla)=(0.126 \pm 0.022)\text{V} \quad (k=1.960, P=95\%)$$

其中， \pm 后面是扩展不确定度 $U(\nabla)$ ，它的包含因子为 $k=1.960$ ，是置信概率 $P=95\%$ 的情况下，由 t 分布表查得。

C.4 随机噪声的测量不确定度评定

C.4.1 测量原理与方法

在数据采集系统的测量范围(E_L , E_H)内，假设其输入 E_i 和输出 y_i 关系满足公式

$$y(E_i)=E_i \dots\dots\dots (C.4.1)$$

其中， E_L ——为通道的测量范围下限； E_H ——为通道的测量范围上限；量程 $E_r=|E_H-E_L|$ 。

用对应 E_i 的采集数据 $y_{ij}(j=1, \dots, n)$ ，按式(C.4.2)计算平均值

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n y_{ij} \dots\dots\dots (C.4.2)$$

测量值 y_{ij} 的实验方差

$$S^2(y_{ij}) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \dots\dots\dots (C.4.3)$$

对应 E_i 的随机噪声标准差 σ_i 。

$$\sigma_i = S(y_{ij}) \dots\dots\dots (C.4.4)$$

C.4.2 测量不确定度模型

从式(C.4.4)可见, 针对输入 E_i 的测量, 其随机噪声 σ_i 的测量不确定度 $u(\sigma_i)$ 的主要来源:

- 直流标准信号 E_i 的不确定度 $u_0(E_i)$;
- 输入 E_i 的测量重复性引入的不确定度 $u_1(S_{ij})$;
- 测量系统分辨力 (A/D 位数) 引入的不确定度 u_2 。

显然, $u_0(E_i)$ 、 $u_1(S_{ij})$ 与 u_2 三者不相关。

则有, 随机噪声 σ_i 的合成标准不确定度 $u_c(\sigma_i)$

$$u_c(\sigma_i) = \sqrt{u_0^2(E_i) + u_1^2(S_{ij}) + u_2^2} \dots\dots\dots (C.4.5)$$

C.4.3 测量数据及处理

以某型数字示波器为测量系统, 其测量范围设为 $(E_L, E_H) = (-5V, 5V)$, A/D 位数为 $b=8\text{bits}$, 则测量系统的输入值 E_i 按上述式(C.4.2)给出, 并如表 C.4.2 所示, 各输入值 E_i 的允许误差极限 $\pm\Delta_i$ 由标准仪器说明书获得, 对应的测量系统测量值的平均值 \bar{y}_i 和均值方差 $S^2(\bar{y}_i)$ 和不确定度 $u(\bar{y}_i)$ 可相应获得, 如表 C.4.2 所示。

- 直流标准信号的不确定度, 按照 B 类评价方法获得。假设信号 E_i 的误差在其允许误差极限 $[-\Delta_{i-}, +\Delta_{i+}]$ 内服从均匀分布, 则误差区间半宽度 $a_i = (\Delta_{i+} - \Delta_{i-})/2$, E_i 的不确定度 $u_0(E_i) = \frac{a_i}{\sqrt{3}}$, Δ_{i+} 与 Δ_{i-} 由说明书可知, 如表 C.4.1 所示。

表 C.4.1: 直流标准电压 E_i 的允许误差极限

量 程	分辨力	允许误差极限 $[-\Delta_{i-}, +\Delta_{i+}]$
220mV	10nV	$\pm 0.0009\%$ 读值 $\pm 0.8\mu\text{V}$
2.2V	100nV	$\pm 0.0008\%$ 读值 $\pm 1.2\mu\text{V}$
11V	1 μV	$\pm 0.0008\%$ 读值 $\pm 4\mu\text{V}$

表 C.4.2 范围 $(-5V, 5V)$ 内测量数据及处理结果 ($n=1000$)

i	E_i (V)	$u(E_i)$ (μV)	\bar{y}_i (V)	$S(y_{ij})$ (mV)	$u(S(y_{ij}))$ (mV)	u_2 (mV)	$u_c(\sigma_i)$ (mV)	$U(\sigma_i)$ (mV)
1	-4.6875	24.0	-4.58998	49	1.1	0.253	1.1	2.3
2	-4.0625	21.1	-3.97004	52	1.2	0.253	1.2	2.3
3	-3.4375	18.2	-3.33784	49	1.1	0.253	1.1	2.3
4	-2.8125	15.3	-2.70728	49	1.1	0.253	1.1	2.3
5	-2.1875	10.8	-2.09078	48	1.1	0.253	1.1	2.3
6	-1.5625	7.91	-1.45432	48	1.1	0.253	1.1	2.3
7	-0.9375	5.02	-0.834939	47	1.1	0.253	1.1	2.3
8	-0.3125	2.14	-0.202492	47	1.1	0.253	1.1	2.3
9	0.3125	2.14	0.418474	51	1.1	0.253	1.1	2.3
10	0.9375	5.02	1.04458	49	1.1	0.253	1.1	2.3
11	1.5625	7.91	1.67738	51	1.1	0.253	1.1	2.3
12	2.1875	10.8	2.29848	48	1.1	0.253	1.1	2.3
13	2.8125	15.3	2.92457	51	1.1	0.253	1.1	2.3
14	3.4375	18.2	3.55496	48	1.1	0.253	1.1	2.3
15	4.0625	21.1	4.18852	48	1.1	0.253	1.1	2.3
16	4.6875	24.0	4.80928	50	1.1	0.253	1.1	2.3

- 测量系统测量重复性引入的不确定度, 按照 A 类评价方法获得, 在测量点 E_i 上测量值实验标准偏差 $S(y_{ij})$ 的不确定度 $u(S(y_{ij}))$ 可由下式获得

$$u(S(y_{ij})) = \frac{S(y_{ij})}{\sqrt{2(n-1)}}$$

$$u_1(S(y_{ij})) = u(S(y_{ij})) = \frac{S(y_{ij})}{\sqrt{2(n-1)}}$$

c)由系统测量范围(E_L, E_H)= $(-5V, 5V)$, A/D 位数为 $b=8\text{bits}$, 得量化误差为 $\text{LSB}=(E_H - E_L)/2^b = 39.0625\text{mV}$ 。设分辨力造成的误差在 $(-0.5 \times \text{LSB}, 0.5 \times \text{LSB})$ 内服从均匀分布, 则 $a=0.5 \times \text{LSB} = 19.5\text{mV}$, $u_2(\bar{y}_i) = \frac{a}{\sqrt{3}} = 11.3\text{mV}$,

$$u_2 = \frac{u_2(\bar{y}_i)}{\sqrt{2(n-1)}}$$

C.4.4 合成不确定度计算

各个测量点 E_i 上的随机噪声标准差 σ_i 及其合成标准不确定度 $u_c(\sigma_i)$ 由式(C.4.4)和式(C.4.5)分别计算, 其数值详见表 C.4.2。

C.4.5 扩展不确定度

选取包含因子 $k=2$, 则可得, 最大允许误差的扩展不确定度

$$U(\sigma_i) = k \times u_c(\sigma_i) = 2.3 \text{ mV}$$

C.4.6 测量结果的最终表述

以 E_1 为例, 其随机噪声标准差 σ 测量值 σ

$$\sigma = \sigma_i \pm U(\sigma_i) = (0.049 \pm 0.002)\text{V} \quad (k=2)$$

C.5 有效位数的测量不确定度评定

C.5.1 测量原理与方法

有效位数的评价, 基本思想是通过测量系统对一个单频正弦波信号的采集数据, 运用曲线拟合的方法, 评价出其在此频率点上的信号幅度与噪声及失真幅度之比, 最终获得有效位数测量结果。具体作法如下:

设: 测量系统通道的量程为 E_r , 双极性对称输入方式, 通道采集速率 ν ; $E_p \leq E_r/2$, $f_0 \leq \nu/3$, (推荐取 $f_0 = N \cdot \nu/n$); 给测量系统加载一个低失真正弦波信号:

$$e(t) = E_p \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) \dots\dots\dots (C.5.1)$$

其中, n ——为通道采集数据个数;

N ——为通道采集的信号整周期个数; n 与 N 不能有公共因子

启动采集, 获得一组采集数据 $x_i (i=1, \dots, n)$, 按最小二乘法求出采集数据 $x_i (i=1, \dots, n)$ 的最佳拟合信号:

$$a(t) = A \sin(2\pi f t + \varphi) + D \dots\dots\dots (C.5.2)$$

其中, $a(t)$ ——为拟合信号的瞬时值;

A ——为拟合正弦波形的幅度;

f ——为拟合正弦波形的频率;

φ ——为拟合正弦波形的初相位;

D ——为拟合信号的直流分量值。

由于实际的采集数据是一些离散化的值 x_i , 对应地, 其时间也是离散化的 t_i , 其中, $t_i = i/\nu$, ($i=1, \dots, n$); 这样, 式(C.5.2)变成了 $a(t_i) = A \sin(2\pi f t_i + \varphi) + D$, 简记为:

$$a(i) = A \sin(\omega i + \varphi) + D \dots\dots\dots (C.5.3)$$

$$\omega = 2\pi f_0 / \nu$$

则, 实际误差有效值 ρ 为:

$$\rho = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - A \cdot \sin(\omega \cdot i + \varphi) - D)^2 \right)^{1/2}$$

式中, t_i 为第 i 个测量点的时刻($i=1, \dots, n$)(秒)

当实际误差有效值 ρ 最小时, 可获得式(C.5.1)的最小二乘意义下的拟合正弦波信号式(C.5.3)。

设有效位数评价过程中, 信号源信噪比(总失真度的另一种表示方式)为 SI 分贝, 信号源噪声为 0 时, 被评价的测量系统自身的噪声相对于量程的等效信噪比为 SD 分贝, 系统的有效位数为 BD , 测量数据的噪声相对于量程的等效信噪比 SR 分贝, 对应的有效位数为 BR , η 为信号峰峰值与通道量程之比。此时, 通过 ρ 可以按式(C.5.4)和(C.5.5)计算 BR 和 SR :

$$BR = \log_2(E_r / (\rho \times \sqrt{12})) \quad (\text{bits}) \quad \dots\dots\dots (C.5.4)$$

$$SR = 6.02 \times BR + 1.76 \quad (\text{dB}) \quad \dots\dots\dots (C.5.5)$$

$$BD = (-10 \times \lg(10^{-(6.02 \cdot BR + 1.76)/10} - \eta^2 \times 10^{-SI/10}) - 1.76) / 6.02 \dots\dots\dots (C.5.6)$$

$$SD = 6.02 \times BD + 1.76$$

实际工作中, 通常不对信号源的总失真度(或信噪比)进行测量和修正, 而是使用 BR 值作为有效位数 BD 的测量结果。

C.5.2 测量不确定度模型

由上述过程和式(C.5.4)、(C.5.6)可见, 有效位数校准评价的不确定度 $u(BR)$, 主要来源于:

- ①、校准用信号源波形失真和噪声 SI 带来的不确定度 $u_1(BR)$ 。
- ②、校准软件带来的不确定度 $u_2(BR_b)$, 它与系统所用 A/D 位数 BR_b 有关;
- ③、被校准的测量设备重复性带来的不确定度 $u_3(BR)$ 。

显然, 可以认为它们之间互不相关, 有:

$$u_c(BR) = \sqrt{u_1^2(BR) + u_2^2(BR_b) + u_3^2(BR)} \quad \dots\dots\dots (C.5.7)$$

C.5.3 测量数据及处理

由式(C.5.4)、(C.5.6)可得, SI 给有效位数 BD 的测量带来的误差极限为:

$$\begin{aligned} \Delta BR &= BD - BR = (10 \lg(1 + \eta^2 \cdot 10^{-(SI-SD)/10})) / 6.02 \\ &= (-10 \times \lg(10^{-(6.02 \cdot BR + 1.76)/10} - \eta^2 \times 10^{-SI/10}) - 1.76) / 6.02 - BR \dots\dots\dots (C.5.8) \end{aligned}$$

设由信号源失真带来的有效位数误差在(0, ΔBR)范围内均匀分布, 则其不确定度 $u_1(BR)$ 按 B 类方法获得:

$$u_1(BR) = \Delta BR / 12^{1/2} \quad \dots\dots\dots (C.5.9)$$

其自由度 $\nu_1(BR) = \infty$ 。

本次测量实验中, 使用某型低失真正弦振荡器作为标准信号源, 信号源信噪比 $SI \geq 100\text{dB}$; 使用某型数据采集系统作为被测设备, 其 A/D 位数为 $b=12\text{bits}$ 。当信号覆盖全量程时, 即 $\eta=1$, 使用该信号源评价被校设备的有效位数, 在不同的有效位数时的不确定度 $u_1(BR)$ 如下表 C.5.1:

表 C.5.1 有效位数评价的不确定度

BD (位)	SD (dB)	ΔBR (位)	$u_1(BR)$ (位)	$u_2(BR)$ (位)	$u_{c0}(BR)$ (位)	ν_{eff0}	k	$U_0(BR)$ (位)
4	25.84	2.8×10^{-8}	8.1×10^{-9}	0.11	0.11	359	1.960	0.22
5	31.86	1.1×10^{-7}	3.2×10^{-8}	6.7×10^{-2}	6.7×10^{-2}	359	1.960	0.13
6	37.88	4.4×10^{-7}	1.3×10^{-7}	1.1×10^{-2}	1.1×10^{-2}	359	1.960	.022
7	43.90	1.8×10^{-6}	5.2×10^{-7}	8.3×10^{-3}	8.3×10^{-3}	359	1.960	.016
8	49.92	7.1×10^{-6}	2.0×10^{-6}	2.8×10^{-2}	2.8×10^{-2}	359	1.960	.055
9	55.94	2.8×10^{-5}	8.1×10^{-6}	2.2×10^{-2}	2.2×10^{-2}	359	1.960	.043
10	61.96	1.1×10^{-4}	3.2×10^{-5}	3.9×10^{-2}	3.9×10^{-2}	359	1.960	.076
11	67.98	4.5×10^{-4}	1.3×10^{-4}	1.3×10^{-2}	1.3×10^{-2}	359	1.960	.025
12	74.00	1.8×10^{-3}	5.2×10^{-4}	2.7×10^{-2}	2.7×10^{-2}	359	1.960	.053

13	80.02	7.2×10^{-3}	2.1×10^{-3}	2.1×10^{-2}	2.1×10^{-2}	359	1.960	.041
14	86.04	2.8×10^{-2}	8.1×10^{-3}	3.2×10^{-2}	3.3×10^{-2}	406	1.960	.065
15	92.06	0.11	3.2×10^{-2}	2.5×10^{-2}	4.0×10^{-2}	2352	1.960	.078
16	98.08	0.36	0.10	2.7×10^{-2}	0.11	98903	1.960	0.22
17	104.1	0.92	0.27	3.1×10^{-2}	0.27	2.0M	1.960	0.53

数据处理软件带来的不确定度 $u_2(BR_b)$, 由 A/D 位数已知(这时它应与 BD 相同: $BD=BR_b=b$) 的理想仿真数据, 使用数据处理软件处理的结果(取 11 个信号周期, $n_0=1000$ 个数据点, 一周期内取 $m_0=360$ 个等间隔初始相位状态文件, 直流分量 $d=0$, 幅度覆盖量程 95%), 按 A 类不确定度评价方法获得如表 C.5.1 所示, 则其自由度 $\nu_2(BR_b)=m_0-1=359$ 。

当被测设备为理想设备时, 可得仅由校准系统带来的有效位数的测量不确定度 $u_{c0}(BR)$:

$$u_{c0}(BR) = \sqrt{u_1^2(BR) + u_2^2(BR_b)} \dots\dots\dots (C.5.10)$$

其有效自由度

$$\nu_{eff0}(BR) = \frac{u_{c0}^4(BR)}{\frac{u_1^4(BR)}{\nu_1(BR)} + \frac{u_2^4(BR_b)}{\nu_2(BR_b)}}$$

令置信概率 $P=95\%$, 由 $\nu_{eff0}(BR)$, 经 t 分布表查得包含因子 $k(BR)$ 。

由包含因子 $k(BR)$, 可得其相应的扩展不确定度为:

$$U_0(BR) = k(BR) \times u_{c0} \dots\dots\dots (C.5.11)$$

具体数值参见表 C.5.1。

选取信号幅度为 $E_p=2.4V$, 频率 $f=21kHz$, 测量设备量程 $E_r=5V$, 采集速率 $\nu=1MSa/s$, 数据个数 $n=1000$, 则 $\eta=0.96$ 。由第 C.5.1 节的过程执行 $m=15$ 次测量, 获得 m 个有效位数测量值 BR_j , 如下表 C.5.2 ($j=1, \dots, m$) 所示。由式(C.5.8)、(C.5.9)可得相应的测量误差极限 ΔBR_j 和 $u_1(BR_j)$, 如表 C.5.2 所示, 其自由度 $\nu_1(BR_j)=\infty$ 。

表 C.5.2 有效位数测量结果

j	BR_j (bits)	SR_j (dB)	ΔBR_j (bits)	$u_1(BR_j)$ (bits)	$u_c(BR_j)$ (bits)	$U(BR_j)$ (bits)
1	10.17	63.00	2.89×10^{-3}	8.34×10^{-4}	0.0851	0.17
2	10.19	63.17	.0111	3.21×10^{-3}	0.0851	0.17
3	10.02	62.14	1.00×10^{-2}	2.89×10^{-3}	0.0851	0.17
4	10.07	62.42	6.53×10^{-3}	1.88×10^{-3}	0.0851	0.17
5	10.19	63.14	6.15×10^{-3}	1.78×10^{-3}	0.0851	0.17
6	10.12	62.71	4.71×10^{-3}	1.36×10^{-3}	0.0851	0.17
7	10.10	62.63	1.14×10^{-2}	3.30×10^{-3}	0.0851	0.17
8	9.974	61.84	6.17×10^{-3}	1.78×10^{-3}	0.0851	0.17
9	9.939	61.63	6.28×10^{-3}	1.81×10^{-3}	0.0851	0.17
10	10.11	62.65	4.74×10^{-3}	1.37×10^{-3}	0.0851	0.17
11	10.15	62.88	2.95×10^{-3}	8.53×10^{-4}	0.0851	0.17
12	10.05	62.32	9.91×10^{-3}	2.86×10^{-3}	0.0851	0.17
13	9.982	61.89	6.48×10^{-3}	1.87×10^{-3}	0.0851	0.17
14	10.08	62.50	9.82×10^{-3}	2.84×10^{-3}	0.0851	0.17
15	10.16	62.97	7.91×10^{-3}	2.28×10^{-3}	0.0851	0.17

由表 C.5.2 的数据可获得均值

$$\overline{BR} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m BR_j = 10.087 \quad (\text{bits})$$

实验标准偏差

$$S(BR_j) = \sqrt{\frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (BR_j - \overline{BR})^2} = 8.066 \times 10^{-2} \quad (\text{bits})$$

则

$$u_3(BR_j) = S(BR_j) = 8.066 \times 10^{-2} \quad (\text{bits})$$

其自由度 $\nu_3(BR_j) = n - 5 = 995$; 由于 A/D 位数为 $b = 12$ bits, 由表 C.5.2 的 $BR_b = b = 12$ bits 查得 $u_2(BR_b) = 2.7 \times 10^{-2}$ (位)。

C.5.4 合成标准不确定度

由表 C.5.2 的数据及式(C.5.7), 可得有效位数 BR_j 的合成不确定度

$$u_c(BR_j) = \sqrt{u_1^2(BR_j) + u_2^2(BR_b) + u_3^2(BR_j)}$$

其有效自由度:

$$\nu_{eff}(BR_j) = \frac{u_c^4(BR_j)}{\frac{u_1^4(BR_j)}{\nu_1(BR_j)} + \frac{u_2^4(BR_b)}{\nu_2(BR_b)} + \frac{u_3^4(BR_j)}{\nu_3(BR_j)}} = \frac{0.0851^4}{\frac{u_1^4(BR_j)}{\infty} + \frac{0.027^4}{359} + \frac{0.08066^4}{995}} = 1191.4$$

由式(C.5.8)得

$$\Delta \overline{BR} = BD - \overline{BR} = 1.17 \times 10^{-4} (\text{bits})$$

$$u_1(\overline{BR}) = \frac{\Delta \overline{BR}}{\sqrt{12}} = 3.39 \times 10^{-5} (\text{bits})$$

其自由度 $\nu_1(\overline{BR}) = \infty$, 而 $u_3(\overline{BR}) = S(\overline{BR}) = \frac{S(BR_j)}{\sqrt{m}} = 2.08 \times 10^{-2}$ (bits), 其自由度 $\nu_3(\overline{BR}) = m - 1 = 14$;

有效位数 \overline{BR} 的合成不确定度

$$u_c(\overline{BR}) = \sqrt{u_1^2(\overline{BR}) + u_2^2(BR_b) + u_3^2(\overline{BR})} = 3.4 \times 10^{-2} \quad (\text{bits})$$

其有效自由度

$$\nu_{eff}(\overline{BR}) = \frac{u_c^4(\overline{BR})}{\frac{u_1^4(\overline{BR})}{\nu_1(\overline{BR})} + \frac{u_2^4(BR_b)}{\nu_2(BR_b)} + \frac{u_3^4(\overline{BR})}{\nu_3(\overline{BR})}} = \frac{0.034^4}{\frac{(3.39 \times 10^{-5})^4}{\infty} + \frac{0.027^4}{359} + \frac{0.0208^4}{14}} = 90$$

C.5.5 扩展不确定度

选取置信概率 $P = 95\%$, 由 $u_c(BR_j)$ 的有效自由度 $\nu_{eff}(BR_j)$, 经 t 分布表查得包含因子 $k(BR_j) = 1.960$, 则有效位数测量结果 BR_j 的扩展不确定度为:

$$U(BR_j) = k(BR_j) \times u_c(BR_j) = 1.960 \times u_c(BR_j)$$

选取置信概率 $P = 95\%$, 由 $u_c(\overline{BR})$ 的有效自由度 $\nu_{eff}(\overline{BR})$, 经 t 分布表查得包含因子 $k(\overline{BR}) = 1.970$ 。则有效位数测量结果 \overline{BR} 的扩展不确定度为:

$$U(\overline{BR}) = k(\overline{BR}) \times u_c(\overline{BR}) = 6.7 \times 10^{-2} \quad (\text{Bit})$$

C.5.6 测量结果的最终表述

如果以单次测量结果进行表述, 则有效位数 BD 的最终测量结果为

$$BD = BR_j \pm U(BR_j) \quad (k = 1.960, P = 95\%)$$

其中, \pm 的后面是扩展不确定度, 它的包含因子为 $k = 1.960$, 置信概率为 $P = 95\%$, 具体值见表 C.5.2。

如果以测量结果的平均值进行表述, 则有效位数 BD 的最终测量结果为

$$BD = \overline{BR} \pm U(\overline{BR}) = (10.087 \pm 6.7 \times 10^{-2}) (\text{Bit}) (k = 1.970, P = 95\%)$$

其中, \pm 的后面是扩展不确定度, 它的包含因子为 $k = 1.970$, 置信概率为 $P = 95\%$ 。

C.6 整周期计点法评价采集速率的测量不确定度评定

C.6.1 测量原理与方法

使用整周期计点法对数据采集速率的评价,基本思想是通过给数据采集系统的采集通道加载一个周期非常准确的标准信号,启动数据采集系统对该信号进行采集,寻找出采集数据个数中所包含的输入信号整周期的个数 N , 以及 N 个信号整周期中包含的采集数据个数 n 。若标准信号频率为 f , 周期为 T , 数据采集系统通道采集速率为 v , 则:

$$v=n/(N \cdot T)=n \cdot f / N \quad \dots\dots\dots (C.6.1)$$

C.6.2 测量不确定度模型

由式(C.6.1)可得:

$$dv = \frac{\partial v}{\partial f} df + \frac{\partial v}{\partial n} dn + \frac{\partial v}{\partial N} dN = \frac{n}{N} df + \frac{f}{N} dn - \frac{nf}{N^2} dN \quad \dots\dots (C.6.2)$$

$$c(f) = \frac{n}{N}; \quad c(n) = \frac{f}{N}; \quad c(N) = -\frac{nf}{N^2}$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{df}{f} + \frac{dn}{n} - \frac{dN}{N} \quad \dots\dots\dots (C.6.3)$$

根据测量值 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 对于输入 X_i 的测量值 x_i ($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$) 的不确定度传递公式:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right) u(x_i, x_j)} \quad \dots\dots\dots (C.6.4)$$

$$u(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \quad \dots\dots\dots (C.6.5)$$

式中, x_i ——为输入 X_i 的测量值; x_j ——为输入 X_j 的测量值, ($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$);

$u(x_i)$ ——为 x_i 的标准不确定度; $u(x_j)$ ——为 x_j 的标准不确定度, ($i \neq j$);

$u(x_i, x_j)$ ——为 x_i 、 x_j 的协方差估计值, ($i \neq j$);

$r(x_i, x_j)$ ——为 x_i 、 x_j 的相关系数估计值, ($i \neq j$);

本测量过程中, 对于相关系数的估计值, 当 ($i \neq j$) 时, 显然有:

$r(f, n)=0$; 输入信号频率值 f 与通道采集数据个数 n 之间不相关;

$r(N, n)=0$; 输入信号周期个数值 N 与通道采集数据个数 n 之间不相关;

$r(N, f)=-1$; 输入信号周期个数值 N 与信号频率 f 之间可以认为是完全相关;

u_A 与其它不确定度分量皆不相关。

则, 采集速率 v 的合成标准不确定度模型:

$$u_c(v) = \left(c^2(f)u^2(f) + c^2(n)u^2(n) + c^2(N)u^2(N) - 2r(N, f)c(N)c(f)u(N)u(f) + u_A^2 \right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{n^2}{N^2} u^2(f) + \frac{f^2}{N^2} u^2(n) + \frac{n^2 f^2}{N^4} u^2(N) - 2 \frac{n^2 f}{N^3} u(N)u(f) + u_A^2 \right)^{1/2} \quad \dots\dots (C.6.6)$$

从式(C.6.6)可见, 通道采集速率 v 的测量不确定度 $u(v)$ 的主要来源有:

- ① 标准信号源频率 f 的不确定度 $u(f)$;
- ② N 个信号周期内采集数据个数 n 的不确定度 $u(n)$;
- ③ 标准信号周期个数 N 的不确定度 $u(N)$;
- ④ 采集速率的测量重复性引入的不确定度 u_A 。

C.6.3 测量数据及处理

测量中, 选取某型射频信号源作为标准周期信号源, 其频率误差极限如表 C.6.1 所示:

表 C.6.1 某型射频信号源频率指标

项目	范围	允许误差极限 $\pm\Delta f/f$
正弦频率	5kHz~3GHz	$\pm 3.6 \times 10^{-7}$

使用某型数据采集系统作为被校准的测量仪器进行评价，选取数据采集系统的输入信号范围为 $\pm 5V$ ，采集速率 $v_0=10MS/s$ ，采集数据个数 $n_0=15000$ ，输入信号幅度 $1V$ RMS，信号频率 $f=1.1MHz$ 。

则，由实际采集数据判断得信号整周期个数 N ；内含采集数据个数 n ；

执行 $m=5$ 次重复测量获得采集速率 v 如表 C.6.2，其 m 次测量平均值 $\bar{v}=9999902.2$ Sa/s，实验标准偏差 $s_v=300.3$ Sa/s。

则， $u_A=300.3$ Sa/s，其自由度 $\nu_A=m-1=4$ 。 $u_A/v=3 \times 10^{-5}$ 。

表 C.6.2 采集速率测量值

信号频率 f (Hz)	标称速率 v_0 (MSa/s)	数据数 n (Points)	周期数 N (Periods)	实测速率 v (Sa/s)	相对误差 $(v_0-v)/v$
1100000.0	10	14996	1649.5	10000360	3.6×10^{-5}
1100000.0	10	14995	1649.5	9999697	-3.0×10^{-5}
1100000.0	10	14991	1649	10000060	6.0×10^{-6}
1100000.0	10	14995	1649.5	9999697	-3.0×10^{-5}
1100000.0	10	14995	1649.5	9999697	-3.0×10^{-5}

信号频率 f 的不确定度 $u(f)$ 按照 B 类评价方法获得。设信号频率误差区间为 $[f-\Delta f, f+\Delta f]$ ，假定信号频率 f 的误差在其允许区间内服从均匀分布，则，

$$u(f) = \Delta f / \sqrt{3}。$$

其自由度 $\nu_f=\infty$ 。由表 C.6.1 所示信号频率 f 的误差区间半宽度 $\Delta f=3.6 \times 10^{-7} \times f=0.396Hz$ ， $u(f)=\Delta f/\sqrt{3}=0.22863Hz$ 。

采集数据个数 n 的不确定度 $u(n)$ 按照 B 类评价方法获得。由于实际应用中，计数误差最大值 $\Delta n=+1$ 或 -1 。即，不论是哪种情况出现，计点误差区间宽度都为 2，误差区间半宽度 $a=1$ ，设计点误差在其误差区间内服从均匀分布，则采集数据个数 n 的不确定度

$$u(n) = a/\sqrt{3} = 1/\sqrt{3}$$

其自由度 $\nu_n=\infty$ 。

采集信号周期个数 N 的不确定度 $u(N)$ 。关于周期计数误差 ΔN ，可以根据输入信号为周期信号的前提，选择 N 为整数个周期进行计数，这样，可通过逻辑判定法使得周期计数误差 $\Delta N=0$ ，从而使得 $u(N)=0$ ，将该项误差源去掉。则采集速率 v 的合成标准不确定度：

$$u_c(v) = \sqrt{\frac{n^2}{N^2} u^2(f) + \frac{f^2}{N^2} u^2(n) + u_A^2} = \sqrt{\frac{n^2}{N^2} u^2(f) + \frac{f^2}{3N^2} + u_A^2} \dots\dots\dots (C.6.7)$$

$$u_{relc}(v) = \frac{u_c(v)}{v} = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\Delta f}{f}\right)^2 + \frac{1}{3n^2} + \frac{u_A^2}{v^2}} \dots\dots\dots (C.6.8)$$

采集速率平均值 \bar{v} 的合成标准不确定度：

$$u_c(\bar{v}) = \sqrt{\frac{n^2}{N^2} u^2(f) + \frac{f^2}{N^2} u^2(n) + \frac{u_A^2}{m}} \dots\dots\dots (C.6.9)$$

$$u_{relc}(\bar{v}) = \frac{u_c(\bar{v})}{\bar{v}} \dots\dots\dots (C.6.10)$$

C.6.4 合成不确定度计算

将各个不确定度列表如表 C.6.3 所示。

表 C.6.3 各不确定度分量及其分布列表

不确定度分量	量值	传递系数		分布	自由度
		n/N	9.091		
$u(f)$	0.22863Hz	n/N	9.091	均匀	∞
$u(n)$	$1/\sqrt{3}$	f/N	667	均匀	∞
u_A	300.3 Sa/s	1		正态	4
$u_c(\bar{v})$	488.3 Sa/s			正态	
$u_c(\bar{v})$	407.8 Sa/s			正态	

由式(C.6.7)计算获得采集速率 v 的合成标准不确定度 $u_c(v)=488.3$ Sa/s。

C.6.5 扩展不确定度

由表 C.6.3 的不确定度分量可见，占优势的独立分量为重复性带来的不确定度，服从正态分布，而其次为计点误差带来的不确定度，服从均匀分布，信号源频率的影响较小。故可以判断其合成标准不确定度 $u_c(v)$ 服从正态分布。其有效自由度 $\nu_{eff}(v)$ 为：

$$\nu_{eff}(v) = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^3 \frac{c_i^4 u_i^4}{\nu_i}} = \frac{488.3^4}{\frac{9.091^4 \times 0.22863^4}{\infty} + \frac{667^4 / 9}{\infty} + \frac{300.3^4}{4}} = 28$$

可以判断其平均值合成标准不确定度 $u_c(\bar{v})$ 服从正态分布。其有效自由度 $\nu_{eff}(\bar{v})$ 为：

$$\nu_{eff}(\bar{v}) = \frac{u_c^4}{\frac{c_f^4 u^4(f)}{\nu_f} + \frac{c_n^4 u^4(n)}{\nu_n} + \frac{c_A^4 u_A^4 / m^2}{\nu_A}} = 700$$

令置信概率 $P=95\%$ ，由有效自由度 $\nu_{eff}(v)=28$ ，查 t 分布表得包含因子 $k_P=t_P(\nu_{eff})=2.048$ ，则采集速率 v 的扩展不确定度：

$$U(v) = k_{95} u_c(v) = 1.0 \text{ kSa/s}$$

令置信概率 $P=95\%$ ，由有效自由度 $\nu_{eff}(\bar{v})=700$ ，查 t 分布表得包含因子 $k_P=t_P(\nu_{eff})=1.96$ ，则采集速率平均值 \bar{v} 的扩展不确定度：

$$U(\bar{v}) = k_{95} u_c(\bar{v}) = 8.0 \times 10^2 \text{ Sa/s}$$

C.6.6 测量结果的最终表述

标准周期计点法获得的采集速率测量结果：

$$\nu_0 = v \pm U(v) = 10000.4 \pm 1.0 \text{ (kSa/s)} \quad (k_{95}=2.048, P=95\%)$$

其中，“ \pm ”后面的数据表示扩展不确定度，其包含因子 $k=2.048$ ，该值由置信概率 $P=95\%$ 和有效自由度 $\nu_{eff}=28$ ，查 t 分布表获得。

标准周期计数法获得的采集速率平均值测量结果：

$$\nu_0 = \bar{v} \pm U(\bar{v}) = 99999.0 \times 10^2 \pm 8.0 \times 10^2 \text{ (Sa/s)} \quad (k_{95}=1.96, P=95\%)$$

其中，“ \pm ”后面的数据表示扩展不确定度，其包含因子 $k=1.96$ ，该值由置信概率 $P=95\%$ 和有效自由度 $\nu_{eff}=700$ ，查 t 分布表获得。

C.7 频带宽度的测量不确定度评定

输入频带宽度是数据采集系统的基本特性指标，其含义是指，数据采集系统的增益与信号频率有关，包含其参考增益（通常为其最高增益）值出现的频率点，且增益变化到其最高增益的 η （一般 $\eta=0.707$ ）倍的上、下两个频率点之间的区间，被定义为数据采集系统的输入频带宽度。如图 C.7.1 所示。

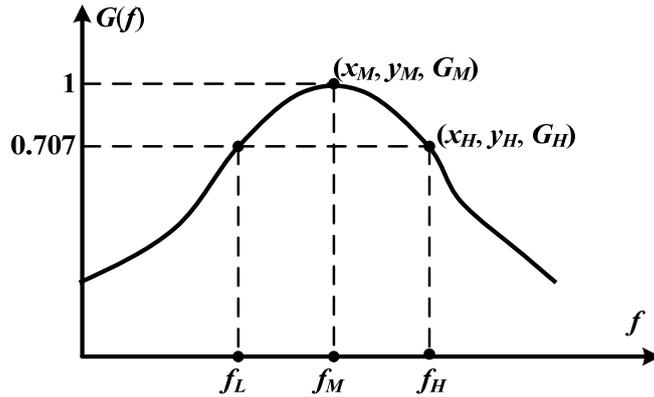


图 C.7.1 数据采集系统增益——频率特性

C.7.1 测量原理与方法

设数据采集系统的输入频带具有带通特性，如图 C.7.1 所示，选取其频带中部增益平缓且增益最大处的频率 f_M 为参考频率点，给系统加载一个频率 f_M 、幅度为 $x_M=x(f_M)$ 的稳幅正弦波激励，获得系统的采集幅度 $y_M=y(f_M)$ ，以及系统在该频率点处的增益：

$$G_M=G(f_M)=y_M/x_M \dots\dots\dots (C.7.1)$$

以 f_M 为参考点，变化信号频率 f ，则系统增益 $G(f)$ 将随频率 f 而变化。

给系统加载一个频率 f_H 、幅度为 $x_H=x(f_H)$ 的稳幅正弦波激励，获得采集幅度 $y_H=y(f_H)$ 和增益：

$$G_H=G(f_H)=y_H/x_H \dots\dots\dots (C.7.2)$$

寻找出上限频率点 $f_H>f_M$ ，使其满足

$$\frac{G_H}{G_M} = \frac{x_M y_H}{x_H y_M} = \eta_H = \eta = 0.707 \dots\dots\dots (C.7.3)$$

同理，给系统加载一个频率 f_L 、幅度为 $x_L=x(f_L)$ 的稳幅正弦波激励，获得采集幅度 $y_L=y(f_L)$ 和增益：

$$G_L=G(f_L)=y_L/x_L \dots\dots\dots (C.7.4)$$

寻找出下限频率点 $f_L<f_M$ ，使其满足

$$\frac{G_L}{G_M} = \frac{x_M y_L}{x_L y_M} = \eta_L = \eta = 0.707 \dots\dots\dots (C.7.5)$$

则数据采集系统频带宽度

$$B=f_H-f_L \dots\dots\dots (C.7.6)$$

如果是低通形状的输入通频带，则

$$f_L=0; B=f_H \dots\dots\dots (C.7.7)$$

数据采集系统的输入频带通常具有低通特性，因此，式(C.7.7)为最为常用的一种表现形式。

C.7.2 测量不确定度模型

由式(C.7.6)可见，频带宽度 B 只与上限频率 f_H 和下限频率 f_L 有关，确定上限频率时，需要用到信号源频率 f_H 、 f_M 及幅度 x_H 、 x_M 和其测量值 y_H 、 y_M ，获得增益比 η_H ；确定下限频率时，需要用到信号源频率 f_L 、 f_M 及幅度 x_L 、 x_M 和其测量值 y_L 、 y_M ，获得增益比 η_L 。由此可得频带宽度 B 测量不确定度的主要来源为：

(1) 正弦交流标准信号频率误差导致的 f_H 和 f_L 的不确定度 $u(f_H)$ 和 $u(f_L)$ ；

- (2) 输入频带上边界点增益比 η_H 的误差导致的频率 f_H 的测量不确定度 $u_\eta(f_H)$;
- (3) 输入频带下边界点增益比 η_L 的误差导致的频率 f_L 的测量不确定度 $u_\eta(f_L)$;
- (4) 频带宽度 B 测量重复性带来的不确定度 $u_A(B)$ 。

若系统为可测直流信号的具有低通形状输入频带的设备, 则 $f_L=0$, 有关 B 的不确定度将只包含 $u(f_H)$ 和 $u_\eta(f_H)$ 两项。

由式(C.7.3)可得

$$\frac{d\eta_H}{\eta_H} = \frac{dx_M}{x_M} - \frac{dx_H}{x_H} - \frac{dy_M}{y_M} + \frac{dy_H}{y_H} \dots\dots\dots (C.7.8)$$

显然可以认为 x_M 、 x_H 、 y_M 、 y_H 不相关, 它们各自的不确定度合成了 η_H 的不确定度 $u(\eta_H)$:

$$\frac{u(\eta_H)}{\eta_H} = \sqrt{\frac{u^2(x_M)}{x_M^2} + \frac{u^2(x_H)}{x_H^2} + \frac{u^2(y_M)}{y_M^2} + \frac{u^2(y_H)}{y_H^2}} \dots\dots\dots (C.7.9)$$

由式(C.7.3)还可得

$$\frac{d\eta_H}{df} = \frac{\partial\eta_H}{\partial x_M} x'_M(f) + \frac{\partial\eta_H}{\partial x_H} x'_H(f) + \frac{\partial\eta_H}{\partial y_M} y'_M(f) + \frac{\partial\eta_H}{\partial y_H} y'_H(f) \dots\dots\dots (C.7.10)$$

由于输入为稳幅正弦波信号, 故可知 $x'_M(f) = 0$, $x'_H(f) = 0$, 而在频带参考频率点 f_M 附近频带平稳, 可以认为有 $y'_M(f) = 0$, 则式(C.7.10)变为:

$$\frac{d\eta_H}{\eta_H} = \frac{y'_H(f)}{y_H} df = \frac{x_H \cdot G'(f)}{y_H} df$$

$$df = \frac{y_H}{\eta_H \cdot x_H G'(f)} d\eta_H$$

$$\begin{aligned} u_\eta(f_H) &= \left| \frac{y_H}{\eta_H x_H G'(f_H)} u(\eta_H) \right| = \left| \frac{y_H}{x_H G'(f_H)} \left(\frac{u^2(x_M)}{x_M^2} + \frac{u^2(x_H)}{x_H^2} + \frac{u^2(y_M)}{y_M^2} + \frac{u^2(y_H)}{y_H^2} \right)^{1/2} \right| \\ &= \left| \frac{y_H}{y'(f_H)} \left(\frac{u^2(x_M)}{x_M^2} + \frac{u^2(x_H)}{x_H^2} + \frac{u^2(y_M)}{y_M^2} + \frac{u^2(y_H)}{y_H^2} \right)^{1/2} \right| \dots\dots\dots (C.7.11) \end{aligned}$$

可以认为 η_H 的误差分量 x_M 、 x_H 、 y_M 、 y_H 均与 f_H 不相关, 则 f_H 的合成标准不确定度为:

$$u_c(f_H) = \sqrt{u_f^2(f_H) + u_\eta^2(f_H)} \dots\dots\dots (C.7.12)$$

同理可得

$$\begin{aligned} u_\eta(f_L) &= \left| \frac{y_L}{\eta_H \cdot x_L G'(f_L)} u(\eta_L) \right| = \left| \frac{y_L}{x_L G'(f_L)} \left(\frac{u^2(x_M)}{x_M^2} + \frac{u^2(x_L)}{x_L^2} + \frac{u^2(y_M)}{y_M^2} + \frac{u^2(y_L)}{y_L^2} \right)^{1/2} \right| \\ &= \left| \frac{y_L}{y'(f_L)} \left(\frac{u^2(x_M)}{x_M^2} + \frac{u^2(x_L)}{x_L^2} + \frac{u^2(y_M)}{y_M^2} + \frac{u^2(y_L)}{y_L^2} \right)^{1/2} \right| \dots\dots\dots (C.7.13) \end{aligned}$$

$$u_c(f_L) = \sqrt{u_f^2(f_L) + u_\eta^2(f_L)} \dots\dots\dots (C.7.14)$$

由式(C.7.6)得

$$dB = df_H - df_L \dots\dots\dots (C.7.15)$$

可以认为 f_L 与 f_H 不相关, 则频带宽度 B 的合成标准不确定度

$$u_c(B) = \sqrt{u_c^2(f_H) + u_c^2(f_L) + u_A^2(B)} \dots\dots\dots (C.7.16)$$

对低通系统，有

$$f_L=0, u_c(B) = \sqrt{u_c^2(f_H) + u_A^2(B)} \dots\dots\dots (C.7.17)$$

其中， $G'(f_H)$ 与 $G'(f_L)$ 是需要特别估计的，对于 $G(f)$ 曲线描述比较详细的系统特性，可以在曲线上实际测量运算获得。当仅用三个频率点 f_L 、 f_M 、 f_H 上的参数来计算频带宽度时，没有足够信息可测量获得较准确的 $G'(f_H)$ 与 $G'(f_L)$ ，此时可保守地按照频带宽度符合一阶 RC 电路特性的情况来估计 $G'(f_H)$ 与 $G'(f_L)$ 。则，对一阶带通系统有

$$G'(f_H) = \frac{-G(f_M)}{2\pi\sqrt{2} \cdot f_H} \dots\dots\dots (C.7.18)$$

$$G'(f_L) = \frac{G(f_M)}{2\pi\sqrt{2} \cdot f_L} \dots\dots\dots (C.7.19)$$

C.7.3 测量数据及处理

图 C.7.2 是使用某型正弦信号源，当输入信号的幅度 $x(f)$ 不变时，获得的某型数字示波器的幅频响应特性曲线图。

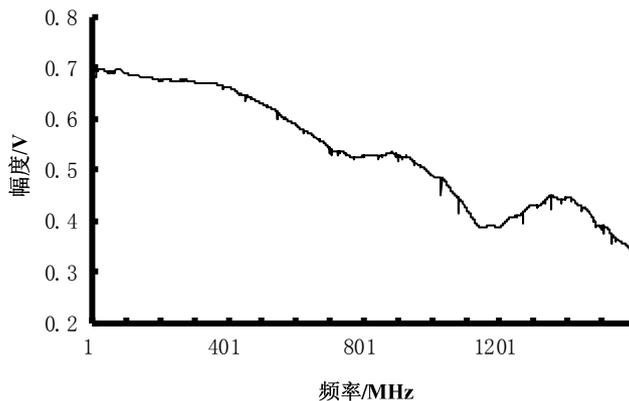


图 C.7.2 被校数字示波器的频率特性 $y(f)$

被校数字示波器 A/D 位数为 8bits，标称频带宽度为 1GHz，测量范围 -0.8V~0.8V，幅度测量允许误差极限为 $\pm 1\%$ ；正弦信号源频率范围为 50kHz~3GHz，频率最大允许误差极限为 $\pm 3.6 \times 10^{-7}$ ，其幅度不平度为 $\pm 4\%$ 。

选取被校数字示波器的采样点数为 $n=2000$ ，选取正弦信号源信号峰值幅度 $x_M=x_H=0.7V$ ，则其幅度允许误差极限为 $\pm \Delta x_M/x_M = \pm \Delta x_H/x_H = \pm 4\%$ ；频率为 1MHz~1765MHz，间隔 1MHz 扫频，其频率最大允许误差极限为 $\pm \Delta f_M/f_M = \pm \Delta f_H/f_H = \pm 3.6 \times 10^{-7}$ 。

由于被测数字示波器的标称频带宽度为 $B_0=1GHz$ ，且为低通形状，则 $f_L=0$ ，选取 $f_M=B_0/20=50MHz$ 为参考频率点，则有 $y_M=0.674152V$ ，

当增益比 $\eta_H=0.707$ 时， $y_H=\eta_H y_M=0.476697V$ ，实测得 $y_1=0.477174V > y_H$ ， $f_1=1.04GHz$ ； $y_2=0.47629V < y_H$ ， $f_2=1.041GHz$ ；线性内插值可得：

$$B = f_H = f_2 + \frac{y_H - y_2}{y_1 - y_2} (f_1 - f_2) = 1.0405396GHz$$

$$G'(f_H) \approx \frac{y_2 - y_1}{f_2 - f_1} = -0.884(\text{V/GHz})$$

重复测量 $m=10$ 次, 获得通频带 B 的 10 个测量结果, 得到其实验标准偏差为: $u_A(B) = 6.698$ MHz, 自由度为 $\nu_A = m - 1 = 9$ 。

设频率 f_H 的误差在其允许误差极限区间 $[-\Delta f_H, \Delta f_H] = [-3.6 \times 10^{-7} f_H, 3.6 \times 10^{-7} f_H]$ 内服从均匀分布, 则频率带来的 f_H 的不确定度:

$$u(f_H) = \Delta f_H / 3^{1/2} = 3.6 \times 10^{-7} f_H / 3^{1/2} = 216.3(\text{Hz})$$

$$u_1(B) = u(f_H)$$

设幅度 x_M 的误差在其允许误差极限区间 $[-\Delta x_M, \Delta x_M] = [-4\% x_M, 4\% x_M]$ 内服从均匀分布, 则 x_M 的不确定度:

$$u(x_M) = \Delta x_M / 3^{1/2} = x_M \cdot 4\% / 3^{1/2} = 0.0231 x_M$$

$$u_2(B) = \left| \frac{y_H}{y'(f_H)} \right| \cdot \frac{u(x_M)}{x_M} = c_0 \cdot \frac{u(x_M)}{x_M} = c_2 \cdot u(x_M) = 25.4 \text{MHz}$$

设幅度 x_H 的误差在其允许误差极限区间 $[-\Delta x_H, \Delta x_H] = [-4\% x_H, 4\% x_H]$ 内服从均匀分布, 则 x_H 的不确定度:

$$u(x_H) = \Delta x_H / 3^{1/2} = x_H \cdot 4\% / 3^{1/2} = 0.0231 x_H$$

$$u_3(B) = c_0 \cdot \frac{u(x_H)}{x_H} = c_3 \cdot u(x_H) = 25.4 \text{MHz}$$

设幅度 y_M 的误差在其允许误差极限区间 $[-\Delta y_M, \Delta y_M] = [-1\% y_M, 1\% y_M]$ 内服从均匀分布, 则 y_M 的不确定度:

$$u(y_M) = \Delta y_M / 3^{1/2} = y_M \cdot 1\% / 3^{1/2} = 0.00577 y_M$$

$$u_4(B) = c_0 \cdot \frac{u(y_M)}{y_M} = c_4 \cdot u(y_M) = 6.59 \text{MHz}$$

设幅度 y_H 的误差在其允许误差极限区间 $[-\Delta y_H, \Delta y_H] = [-1\% y_H, 1\% y_H]$ 内服从均匀分布, 则 y_H 的不确定度:

$$u(y_H) = \Delta y_H / 3^{1/2} = y_H \cdot 1\% / 3^{1/2} = 0.00577 y_H$$

$$u_5(B) = c_0 \cdot \frac{u(y_H)}{y_H} = c_5 \cdot u(y_H) = 6.59 \text{MHz}$$

C.7.4 合成不确定度计算

将上述数据代入式(C.7.12)、(C.7.17)得合成标准不确定度

$$u_c(B) = \sqrt{u_c^2(f_H) + u_A^2(B)} = \sqrt{\sum_{i=1}^5 u_i^2(B) + u_A^2(B)} = 37.71 \text{MHz}$$

C.7.5 扩展不确定度

将上述不确定度列表如下表 C.7.1:

表 C.7.1 不确定度分量概算表

序号 i	输入量 X_i	估计值 x_i	标准不确定度 $u(x_i)$	分布	灵敏系数 c_i	不确定度分量 $u_i(B)$
1	f_H	1.0405396GHz	216.3Hz	矩形	1	216.3Hz
2	x_M	0.7V	$0.0231 x_M$	矩形	1.1005GHz/V	25.4MHz
3	x_H	0.7V	$0.0231 x_H$	矩形	1.1005GHz/V	25.4MHz
4	y_M	0.674152V	$0.00577 y_M$	矩形	1.4271GHz/V	6.59MHz
5	y_H	0.476697V	$0.00577 y_M$	矩形	1.6163GHz/V	6.59MHz
6	B	1.0405396GHz	6.698MHz	正态	1	6.698MHz

从上述不确定度概算表中可见, $u_2(B)$ 与 $u_3(B)$ 的合成结果已经大于其它分量合成结果的 3 倍, 可见 $u_2(B)$ 与 $u_3(B)$ 合成后的分量为明显占优势的分量, 而分量 $u_2(B)$ 与 $u_3(B)$ 合成经判断应服从三角分布。故可以认为 $u_c(B)$ 主要服从三角分布。

取置信概率 $P=95\%$, 则对于三角分布, $k_{95}=1.90$, 可得输入频带宽度测量结果 B 的扩展不确定度为

$$U_{95}(B) = k_{95} \times u_c(B) = 1.90 \times 37.71 \text{ MHz} = 72 \text{ MHz}$$

C.7.6 测量结果的最终表述

被校数字示波器的输入通频带

$$B_0 = B \pm U_{95}(B) = (1041 \pm 72) \text{ MHz} \quad (k=1.90, P=95\%)$$

其中, “ \pm ”后面是扩展不确定度, 其包含因子 $k=1.90$, 由置信概率 $P=95\%$, 据三角分布获得。

C.8 上升时间的测量不确定度评定

C.8.1 测量原理与方法

图 C.8.1 所示为数据采集系统测量一个快上升沿阶跃信号获得的测量波形曲线示意图, 设激励信号源的上升时间为 t_0 , 其不确定度 $U(t_0)$, $k=2$ 。而数据采集系统作为被测对象, 其阶跃响应上升时间 t_r 为待测参数。

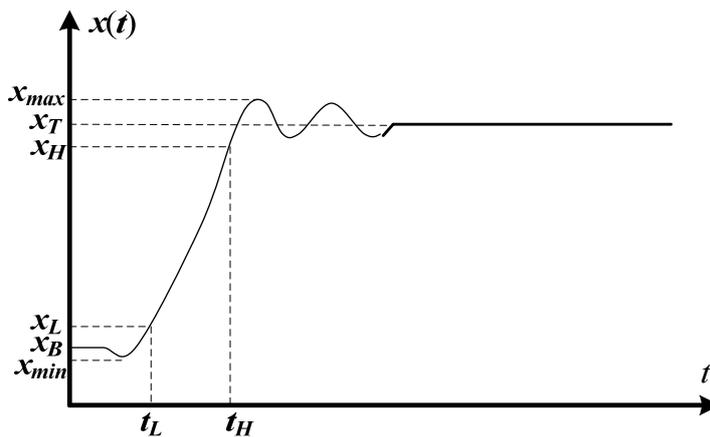


图 C.8.1 数据采集系统阶跃响应特性

首先用众数法获得阶跃响应曲线波形的顶 x_T 和底 x_B 的测量值, 即, 将数据采集系统包含信号波形的测量范围区间 $[x_{min}, x_{max}]$ 等分为 M 份, 每份宽度为:

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{M} \quad \dots \dots \dots (C.8.1)$$

将 M 份小区间依次编号为 $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_i, \dots, \Delta x_M$, 用众数法确定在 x_T 附近, 阶跃响应曲线以最大频率落在某一区间时, 该区间中点值即是 x_T 的测量值。同理可得 x_B 的测量值。

顶 x_T 和底 x_B 之间, 10% 阶跃幅度点幅值 x_L 和 90% 阶跃幅度点幅值 x_H 分别为:

$$x_L = x_B + 0.1(x_T - x_B) = 0.9x_B + 0.1x_T \quad \dots \dots \dots (C.8.2)$$

$$x_H = x_B + 0.9(x_T - x_B) = 0.1x_B + 0.9x_T \quad \dots \dots \dots (C.8.3)$$

由 x_L 在阶跃响应曲线上以线性插值法找到相对应的时刻 t_L , 由 x_H 在阶跃响应曲线上以线性插值法找到相对应的时刻 t_H 。

数据采集系统上升时间为:

$$t_r = \sqrt{(t_H - t_L)^2 - t_0^2} \quad \dots \dots \dots (C.8.4)$$

C.8.2 测量不确定度模型

由式(C.8.4)可见, 上升时间测量结果 t_r 与 t_H 、 t_L 、 t_0 有关, 而 t_H 、 t_L 与 x_T 、 x_B 以及阶跃响应曲线斜率 $x'(t_L)$ 、 $x'(t_H)$ 均有关, 由此可得上升时间不确定度的主要来源为:

- 1) 激励信号上升时间 t_0 及其不确定度 $u_1(t_0)$;
- 2) 数据采集系统时基准确度带来的不确定度 u_2 ;
- 3) 数据采集系统时基分辨力带来的不确定度 u_3 ;
- 4) 数据采集系统测量重复性带来的不确定度 u_4 ;
- 5) 阶跃信号顶值的 x_T 测量不确定度 $u(x_T)$;
- 6) 阶跃信号底值的 x_B 测量不确定度 $u(x_B)$ 。

由式(C.8.4)可得:

$$dt_r = \frac{t_H - t_L}{t_r} d(t_H - t_L) - \frac{t_0}{t_r} dt_0 \dots\dots\dots (C.8.5)$$

显然 t_0 与 $(t_H - t_L)$ 不相关, 使用 t_0 可能出现的最大值 T_0 代替 t_0 , 得合成标准不确定度:

$$u_c(t_r) = \left(\frac{T_0^2}{t_r^2} u_1^2(t_0) + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + \frac{(t_H - t_L)^2}{t_r^2} u^2(t_H - t_L) \right)^{1/2} \dots\dots\dots (C.8.6)$$

可以认为 x_T 的测量误差在区间 $[-0.5\Delta x, 0.5\Delta x]$ 内服从均匀分布, 则其实验标准偏差:

$$s(x_T) = \frac{0.5\Delta x}{\sqrt{3}} = s_x = u_x \dots\dots\dots (C.8.7)$$

不确定度:

$$u(x_T) = s(x_T)$$

同理可得, x_B 的实验标准偏差:

$$s(x_B) = \frac{0.5\Delta x}{\sqrt{3}} = s_x \dots\dots\dots (C.8.8)$$

不确定度:

$$u(x_B) = s(x_B)$$

可以认为 x_T 与 x_B 不相关, 则由式(C.8.2)、(C.8.3)可得:

$$dx_L = 0.9dx_B + 0.1dx_T \dots\dots\dots (C.8.9)$$

$$dx_H = 0.1dx_B + 0.9dx_T \dots\dots\dots (C.8.10)$$

其不确定度:

$$u(x_L) = \sqrt{0.9^2 u^2(x_B) + 0.1^2 u^2(x_T)} \dots\dots\dots (C.8.11)$$

$$u(x_H) = \sqrt{0.1^2 u^2(x_B) + 0.9^2 u^2(x_T)} \dots\dots\dots (C.8.12)$$

其实验方差:

$$s^2(x_L) = 0.81s^2(x_B) + 0.01s^2(x_T) \dots\dots\dots (C.8.13)$$

$$s^2(x_H) = 0.01s^2(x_B) + 0.81s^2(x_T) \dots\dots\dots (C.8.14)$$

其协方差:

$$s(x_L, x_H) = E\{[x_L - E(x_L)][x_H - E(x_H)]\} = 0.09(s^2(x_B) + s^2(x_T)) \dots\dots\dots (C.8.15)$$

其相关系数:

$$r(x_L, x_H) = \frac{s(x_L, x_H)}{s(x_L)s(x_H)} = 0.22 \dots\dots\dots (C.8.16)$$

由

$$dx = x'(t)dt \dots\dots\dots (C.8.17)$$

得

$$u(t) = \frac{u(x)}{x'(t)} \dots\dots\dots (C.8.18)$$

有不确定度:

$$u(t_L) = \frac{u(x_L)}{x'(t_L)}; \quad u(t_H) = \frac{u(x_H)}{x'(t_H)}$$

有实验标准偏差:

$$s(t_L) = \frac{s(x_L)}{x'(t_L)}; \quad s(t_H) = \frac{s(x_H)}{x'(t_H)}$$

其实验协方差:

$$s(t_L, t_H) = \frac{s(x_L, x_H)}{x'(t_L)x'(t_H)} \dots\dots\dots (C.8.19)$$

相关系数:

$$r(t_L, t_H) = \frac{s(t_L, t_H)}{s(t_L)s(t_H)} = r(x_L, x_H) \dots\dots\dots (C.8.20)$$

实际上, 阶跃响应特性曲线在区间 $[t_L, t_H]$ 内可以近似认为是一条直线, 则有:

$$x'(t_L) \approx x'(t_H) \approx \frac{0.8(x_T - x_B)}{t_H - t_L} \dots\dots\dots (C.8.21)$$

$$\begin{aligned} u^2(t_H - t_L) &= u^2(t_H) + u^2(t_L) - 2r(t_H, t_L)u(t_H)u(t_L) = u^2(t_H) + u^2(t_L) - 0.44u(t_H)u(t_L) \\ &= \frac{2.4375(t_H - t_L)^2 s_x^2}{(x_T - x_B)^2} \dots\dots\dots (C.8.22) \end{aligned}$$

则式(C.8.6)变为:

$$\begin{aligned} u_c(t_r) &= \left(\frac{T_0^2}{t_r^2} u_1^2(t_0) + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + \frac{2.4375(t_H - t_L)^4 s_x^2}{t_r^2 (x_T - x_B)^2} \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{c_1^2 u_1^2(t_0) + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + c_x^2 u_x^2} \dots\dots\dots (C.8.23) \end{aligned}$$

C.8.3 测量数据及处理

使用某型快上升沿阶跃信号源激励, 获得的某型数据采集系统阶跃响应测量结果曲线如图 C.8.2 所示。

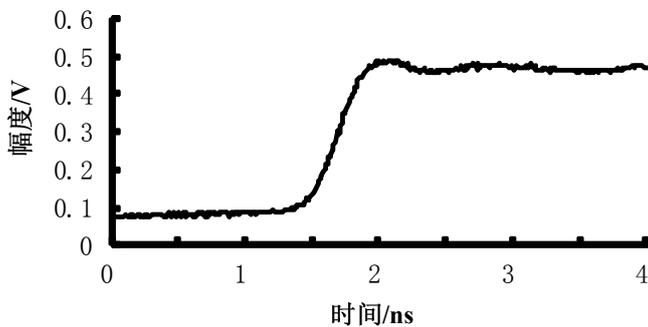


图 C.8.2 某型数据采集系统的阶跃响应曲线 $x(t)$

其中, 被校数据采集系统 A/D 位数 $b=8$, 标称输入信号的频带宽度为 1GHz, 测量范围 $-0.5V \sim 0.5V$, 幅度测量允许误差极限为 $\pm 1\%$, 时基误差极限为 $\pm 2.5 \times 10^{-5}$; 快沿阶跃信号源的上

升时间 $t_0=85\text{ps}$ ，不确定度 $U_1(t_0)=8\text{ps}(k=2)$ ；其顶部不平度 $<10\%$ 。

被校数据采集系统的采样点数为 $n=2500$ ，采集速率为 100GSa/s ，快沿阶跃信号源的信号阶跃幅度为 0.4V ，重复频率为 1kHz 。

由 $t_0=85\text{ps}$ ， $U_1(t_0)=8\text{ps}(k=2)$ ，可以估计 $T_0=t_0+U_1(t_0)=93\text{ps}$ ， $u_1(t_0)=4\text{ps}$ 。 $u_1(t_0)$ 自身的相对不确定度 $u(u_1(t_0))/u_1(t_0)$ 以 10% 估计，则其自由度为：

$$\nu_1(t_0) = \frac{1}{2 \times (10\%)^2} = 50$$

取测量范围区间 $[x_{min}, x_{max}] = [-0.5\text{V}, 0.5\text{V}]$ ， $M=2^b=256$ ，由式(C.8.1)得 $\Delta x=3.91\text{mV}$ ，由式(C.8.7)得 $s_x=1.13\text{mV}$ ；顶 x_T 和底 x_B 的测量不确定度均为：

$u_x=s_x=1.13\text{mV}$ ， u_x 自身的相对不确定度 $u(u_x)/u_x$ 以 10% 估计，则其自由度为：

$$\nu(x_T) = \nu(x_B) = \nu_x = \frac{1}{2 \times (10\%)^2} = 50$$

由测量曲线中得：

$$x_B=70.4\text{mV}, x_T=0.475\text{V}, t_H-t_L=0.406\text{ns}$$

将上述数据代入式(C.8.4)得

$$t_r=0.397\text{ns};$$

由被测数据采集系统的时基误差极限值 $\pm 2.5 \times 10^{-5}$ ；可以认为其时基相对误差在区间 $[-2.5 \times 10^{-5}, +2.5 \times 10^{-5}]$ 内呈均匀分布，则其实验标准偏差：

$$s_{2r} = \frac{2.5 \times 10^{-5}}{\sqrt{3}} = 1.443 \times 10^{-5}$$

$$u_2 = s_{2r} \times t_r = 5.73 \times 10^{-6}\text{ns}$$

其自由度为 $\nu_2=\infty$ ；

由被测数据采集系统的采集速率值 100GSa/s ；可以认为时间抽样量化带来的误差在区间 $[-10\text{ps}, +10\text{ps}]$ 内呈均匀分布，其实验标准偏差：

$$s_3 = \frac{10}{\sqrt{3}} = 5.77\text{ps}$$

$$u_3 = s_3 = 5.77\text{ps}$$

其自由度为 $\nu_3=\infty$ ；

由被测数据采集系统对上述阶跃激励进行 $m=28$ 次重复测量，获得上升时间的测量结果如下表 C.8.1 所示。

表 C.8.1 上升时间测量结果（单位 ps）

397.0	399.9	387.0	380.8
370.0	394.4	397.0	381.0
390.0	382.0	390.0	394.6
380.4	389.9	391.7	373.0
377.3	374.1	390.7	381.0
396.6	391.6	368.0	391.5
393.7	384.0	371.5	384.0

均值 $\bar{t}_r = 385.8\text{ps}$

实验标准偏差为： $s_4=9.1\text{ps}$

单次测量的重复性带来的不确定度： $u_4=s_4$

其自由度为 $\nu_4=m-1=27$ 。

均值 \bar{t}_r 的重复性带来的不确定度： $u_4(\bar{t}_r) = \frac{s_4}{\sqrt{m}} = 1.72\text{ps}$

C.8.4 合成不确定度计算

将上述数据代入式(C.8.23)得:

$$c_1=0.2343, c_x=1.6022\text{ns/V}$$

合成标准不确定度:

$$u_c(t_r)=11\text{ps}$$

$$u_c(\bar{t}_r)=6.4\text{ps}$$

将各个不确定度分量列表如下表 C.8.2 所示:

表 C.8.2 各不确定度分量及其分布列表

不确定度分量	量值	传递系数	分布	自由度
u_1	4ps	0.2343	正态	50
u_2	0.00573ps	1	均匀	∞
u_3	5.77ps	1	均匀	∞
u_4	9.1	1	正态	27
u_x	1.13mV	1602.2ps/V	三角	50
$u_c(t_r)$	11ps		正态	57

从上述表 C.8.2 可见, $u_c(t_r)$ 由多个不确定度分量组成, 各不确定度分量中, 占优势分量符合正态分布, 可判断其符合正态分布。

可得其合成标准不确定度的有效自由度:

$$v_{\text{eff}}(t_r) = \frac{u_c^4(t_r)}{\sum_{i=1}^5 \frac{u_i^4}{v_i}} = \frac{u_c^4(t_r)}{\frac{c_1^4 u_1^4}{v_1} + 0 + 0 + \frac{u_4^4}{v_4} + \frac{c_x^4 u_x^4}{v_x}} = 57$$

而 $u_c(\bar{t}_r)$ 由多个不确定度分量组成, 各不确定度分量中, 无绝对占优势分布, 可判断其符合正态分布。可得其合成标准不确定度的有效自由度:

$$v_{\text{eff}}(\bar{t}_r) = \frac{u_c^4(\bar{t}_r)}{\sum_{i=1}^5 \frac{u_i^4}{v_i}} = \frac{u_c^4(\bar{t}_r)}{\frac{c_1^4 u_1^4}{v_1} + 0 + \frac{u(\bar{T}_r)^4}{v_4} + \frac{c_x^4 u_x^4}{v_x}} = 3027$$

C.8.5 扩展不确定度

选取置信概率 $P=95\%$, 由有效自由度 $v_{\text{eff}}(t_r)=57$, 经 t 分布表查得包含因子 $k_{95}=2.00$, 则可得上升时间的扩展不确定度:

$$U_{95}(t_r) = k_{95} \cdot u_c(t_r) = 22\text{ps};$$

选取置信概率 $P=95\%$, 由有效自由度 $v_{\text{eff}}(\bar{t}_r)=3027$, 经 t 分布表查得包含因子 $k_{95}=1.96$, 则可得上升时间的扩展不确定度:

$$U_{95}(\bar{t}_r) = k_{95} \cdot u_c(\bar{t}_r) = 13\text{ps};$$

C.8.6 测量结果的最终表述

按单次测量得数据采集系统的上升时间:

$$t_{r0} = t_r \pm U_{95}(t_r) = (397 \pm 22)\text{ps} \quad (k=2.00, P=95\%)$$

其中, “ \pm ”后面是扩展不确定度, 其包含因子 $k_{95}=2.00$, 由置信概率 $P=95\%$, 有效自由度 $v_{\text{eff}}(t_r)=70$, 据 t 分布表查得。

按 28 次测量结果的平均值测量得数据采集系统的上升时间:

$$t_{r0} = \bar{t}_r \pm U_{95}(\bar{t}_r) = (386 \pm 13)\text{ps} \quad (k=1.96, P=95\%)$$

其中, “ \pm ”后面是扩展不确定度, 其包含因子 $k_{95}=1.96$, 由置信概率 $P=95\%$, 有效自由度 $v_{\text{eff}}(\bar{t}_r)=3027$, 据 t 分布表查得。

C.9 通道间串扰的测量不确定度评定

C.9.1 测量原理与方法

接线如图 C.9.1 所示, 选择采集顺序上连续的 2 个以上通道 $w, w+1, \dots$ 作为测量通道。通道 w 接到直流电压源上, $w+1, \dots$ 等通道接入电阻 R_0 。

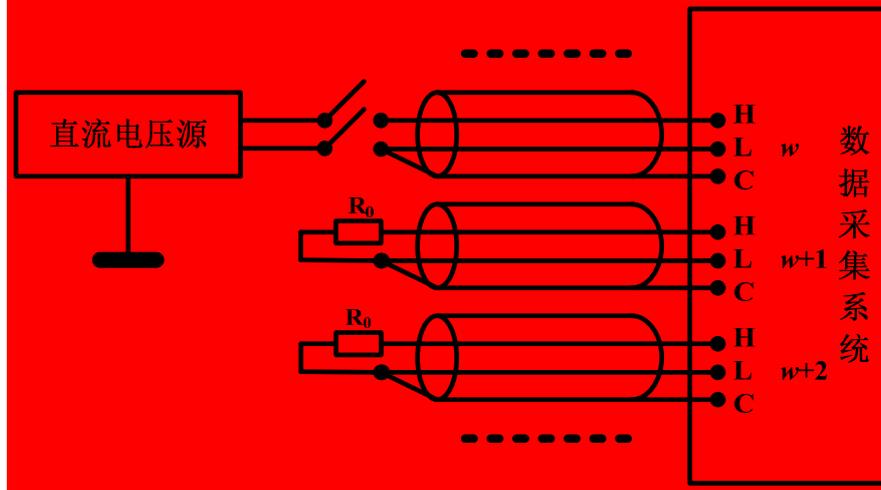


图 C.9.1 通道间串扰校准接线图

图中 R_0 为模拟信号源内阻的不平衡电阻, 有特殊规定的系统, 按规定执行。无特别要求时, 取 $1\text{k}\Omega$ 。

通道 w 选取最大量程。通道 $w+1$ 等其它通道, 均选最小量程。

设置系统通道为最高循环采集速率状态, 每一通道采集数据个数为 $n (\geq 100)$ 。

调置信号源, 使通道 w 的输入信号 E 为零 ($E=0$)。启动采集, 得通道 $j (j=w+1, \dots)$ 的采集数据 $x_{j0} (i=1, \dots, n)$, 按下式计算通道 j 的平均零点 \bar{x}_{j0} :

$$\bar{x}_{j0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ji0} \quad (j=w+1, \dots) \quad (\text{C.9.1})$$

调节信号源, 使信号 E 为通道 w 的测量范围上限或下限 ($E=E_S$)。启动采集, 得通道 j 的采集数据 $x_{jim} (i=1, \dots, n)$, 按下式计算出通道 j 对通道 w 的串扰抑制比 $SCRR_j$:

$$SCRR_j = 20 \cdot \lg \left| \frac{E}{(\bar{x}_{jm} - \bar{x}_{j0}) / G_j} \right| \quad (j=w+1, \dots) \quad (\text{C.9.2})$$

$$\bar{x}_{jm} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{jim} \quad (j=w+1, \dots) \quad (\text{C.9.3})$$

其中, G_j ——测量通道 j 的增益值

C.9.2 测量不确定度模型

由式(C.9.2)可得:

$$dSCRR_j = \frac{20}{\ln(10)} \left(\frac{dE}{E} + \frac{dG_j}{G_j} - \frac{d\bar{x}_{jm}}{\bar{x}_{jm} - \bar{x}_{j0}} + \frac{d\bar{x}_{j0}}{\bar{x}_{jm} - \bar{x}_{j0}} \right) \quad (\text{C.9.4})$$

显然, 测量过程中, G_j 为常数, $dG_j=0$; 各个分量误差之间不相关, 由此可得测量不确定度模型为:

$$u_c(SCRR_j) = \frac{20}{\ln(10)} \sqrt{\frac{u^2(E)}{E^2} + \frac{u^2(\bar{x}_{jm})}{(\bar{x}_{jm} - \bar{x}_{j0})^2} + \frac{u^2(\bar{x}_{j0})}{(\bar{x}_{jm} - \bar{x}_{j0})^2} + u_A^2} \quad (\text{C.9.5})$$

可见,串扰抑制比 $SCRR_j$ 测量结果与电压 E 、未加电压时的均值 \bar{x}_{j0} 、加电压 E 时的均值 \bar{x}_{jm} 、通道增益 G_j 均有关,由此可得其不确定度的主要来源为:

- 1) 激励信号幅度 E 不确定度 $u(E)$;
- 2) 前面通道加电压 E 时,测量均值 \bar{x}_{jm} 的不确定度 $u(\bar{x}_{jm})$;
- 3) 前面通道不加电压时,测量均值 \bar{x}_{j0} 的不确定度 $u(\bar{x}_{j0})$;;
- 4) 数据采集系统测量重复性带来的不确定度 u_A ;

C.9.3 测量数据及处理

C.9.4 合成不确定度计算

C.9.5 扩展不确定度

C.9.6 测量结果的最终表述

C.11 串模抑制比的测量不确定度评定

C.12 输入电阻的测量不确定度评定

附录 D

正弦波形序列的最小二乘拟合算法

理想正弦信号可用下述四参数表达式表示：

$$y(t) = A \cos(\varpi \cdot t) + B \sin(\varpi \cdot t) + D$$

或

$$y(t) = C \cos(\varpi \cdot t + \theta) + D$$

以时间间隔 Δt 进行离散化抽样后，在采样点 i ($i=0,1,\dots,n-1$)上获得的离散序列可相应表述为：

$$y(\Delta t \cdot i) = A \cos(\omega \cdot i) + B \sin(\omega \cdot i) + D$$

或

$$y(\Delta t \cdot i) = C \cos(\omega \cdot i + \theta) + D$$

其中， $\omega = \varpi \Delta t$

用指定参数的正弦波信号作为波形测量仪器的输入，得到一组数据记录。通过改变拟合正弦波形的相位、幅度、直流偏移和频率，使拟合结果和数据记录序列各点的残差平方和最小，即是正弦波形序列最小二乘拟合算法的基本思想。这里提供正弦波形的两种拟合方法：一种用于采样频率和被测信号频率均已知时；另一种用于被测信号频率未知时。每一个途径包括两种基本算法：一种通过矩阵运算，另一种通过叠代过程。对于已知信号频率的情况，当初始条件相同时，上述两个算法结果一致。但两者的收敛性不一样，特别是信号周期数小于5个时，使用矩阵算法比不使用矩阵算法的收敛速度要快。

需要说明的是，下列D.1节中所述的三参数算法（对已知频率）是一种闭合算法，因此总能获得一个结果。但是，如果算法中使用的频率（假设已知）和实际输入的频率不一样，或采集速率有较大误差，三参数算法的结果比稍后所述的四参数算法结果要差。但第D.2.1和D.2.2节中的四参数算法在初始条件偏离较多，或有一些特别不正确的数据下，叠代过程可能发散。D.2.3节中的四参数算法在所述的收敛区间内是绝对收敛的。

D.1 正弦波形序列三参数(已知频率)最小二乘拟合算法

D.1.1 正弦波形序列三参数最小二乘拟合——矩阵算法

设理想正弦信号为：

$$y(t) = A \cos(\varpi \cdot t) + B \sin(\varpi \cdot t) + D$$

数据记录序列为时刻 t_0, t_1, \dots, t_{n-1} 的采集样本 y_0, y_1, \dots, y_{n-1} ，拟合过程即为选取或寻找 A 、 B 、 D ，使下式所述残差平方和最小：

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{n-1} [y_i - A \cos(\varpi \cdot t_i) - B \sin(\varpi \cdot t_i) - D]^2 \quad \dots\dots\dots (D.1)$$

这里， ϖ 是输入正弦信号的角频率(假设已知)

为了找出合适的 A 、 B 和 D 值，首先构造下列矩阵：

$$\Psi = \begin{bmatrix} \cos(\varpi \cdot t_0) & \sin(\varpi \cdot t_0) & 1 \\ \cos(\varpi \cdot t_1) & \sin(\varpi \cdot t_1) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\varpi \cdot t_{n-1}) & \sin(\varpi \cdot t_{n-1}) & 1 \end{bmatrix}; \quad y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{bmatrix}; \quad x = \begin{bmatrix} A \\ B \\ D \end{bmatrix}$$

式(D.1)可用矩阵方式表示如下：

$$\varepsilon = (y - \Psi x)^T (y - \Psi x) \dots\dots\dots (D.2)$$

这里(*)^T表示(*)的转置

可以得出式(D.2)最小时的最小二乘解 \hat{x} :

$$\hat{x} = (\Psi^T \Psi)^{-1} (\Psi^T y)$$

拟合函数为:

$$\hat{y}_i = A \cos(\varpi \cdot t_i) + B \sin(\varpi \cdot t_i) + D$$

将其转换为幅度和相位表达形式:

$$\hat{y}_i = C \cos(\varpi \cdot t_i + \theta) + D$$

其中:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan \left[\frac{-B}{A} \right], & A \geq 0 \\ \arctan \left[\frac{-B}{A} \right] + \pi, & A < 0 \end{cases}$$

拟合残差 r_i 如下:

$$r_i = y_i - A \cos(\varpi \cdot t_i) - B \sin(\varpi \cdot t_i) - D$$

拟合残差有效值如下:

$$\rho = \varepsilon_{rms} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r_i^2}$$

D.1.2 正弦波形序列三参数最小二乘拟合——代数方程算法

设数据记录序列为包含了一系列在时刻 t_i ($i=0, \dots, n-1$) 上采集的正弦信号样本 y_i , 信号的角频率为 ϖ , 定义:

$$\alpha_i = \cos(\varpi \cdot t_i); \quad \beta_i = \sin(\varpi \cdot t_i)$$

然后计算下面的九个和:

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \beta_i; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^2; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i^2; \quad \sum_{i=0}^{n-1} y_i \alpha_i; \quad \sum_{i=0}^{n-1} y_i \beta_i; \quad \sum_{i=0}^{n-1} y_i^2$$

使用这些和, 计算:

$$A = \frac{A_N}{A_D}; \quad B = \frac{B_N}{B_D}; \quad D = \bar{y} - A \cdot \bar{\alpha} - B \cdot \bar{\beta}$$

其中:

$$A_N = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} y_i \alpha_i - \bar{y} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i}{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \beta_i - \bar{\beta} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i}; \quad A_D = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^2 - \bar{\alpha} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i}{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \beta_i - \bar{\beta} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i};$$

$$B_N = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} y_i \beta_i - \bar{y} \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i}{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \beta_i - \bar{\beta} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i}; \quad B_D = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i^2 - \bar{\beta} \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i}{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \beta_i - \bar{\beta} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i};$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i; \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i; \quad \bar{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i$$

拟合函数如下：

$$\hat{y}_i = A \cos(\varpi \cdot t_i) + B \sin(\varpi \cdot t_i) + D$$

其幅度和相位表达形式：

$$\hat{y}_i = C \cos(\varpi \cdot t_i + \theta) + D$$

其中：

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left[\frac{-B}{A}\right], & A \geq 0 \\ \arctan\left[\frac{-B}{A}\right] + \pi, & A < 0 \end{cases}$$

拟合残差有效值为：

$$\rho = \varepsilon_{rms} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{n}}$$

其中：

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sum_{i=0}^{n-1} y_i^2 + A^2 \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^2 + B^2 \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i^2 + nD^2 - 2A \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i y_i - 2B \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i y_i - 2D \sum_{i=0}^{n-1} y_i \\ &\quad + 2AB \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \beta_i + 2AD \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i + 2BD \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - A\alpha_i - B\beta_i - D)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - \hat{y}_i)^2 \end{aligned}$$

由于这是一种闭合算法，因而收敛是肯定的。

D.2 正弦波形序列四参数最小二乘拟合算法

D.2.1 正弦波形序列四参数最小二乘拟合——矩阵叠代算法

设正弦数据记录序列中时刻 t_0, t_1, \dots, t_{n-1} 的采集样本 y_0, y_1, \dots, y_{n-1} ，可使用叠代过程寻找到 A_k 、 B_k 、 D_k 和 ϖ_k 值，使得下式所述残差平方和最小：

$$\varepsilon_k = \sum_{i=0}^{n-1} [y_i - A_k \cos(\varpi_k t_i) - B_k \sin(\varpi_k t_i) - D_k]^2 \dots\dots\dots (D.3)$$

这里 ϖ_k 为输入正弦信号的角频率。

其操作步骤如下：

- a) 设置循环指针 $k=0$ ，对输入正弦信号的角频率 ϖ 作一个初始估计。可以用离散傅里叶变换(DFT)来计算频率；或者通过计数波形过零点个数计算频率；或简单地输入一个测量频率初始值。使用D.1节中给定的三参数矩阵算法进行拟合以确定 A 、 B 和 D ；
- b) 设置 $k=k+1$ ，作下一次叠代；
- c) 使用下式获得新的角频率：

$$\varpi_k = \varpi_{k-1} + \Delta\varpi_{k-1} \quad (\text{当 } k=1 \text{ 时, } \Delta\varpi_{k-1}=0)$$

d) 构造如下矩阵：

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad \Psi_k = \begin{bmatrix} \cos(\varpi_k t_1) & \sin(\varpi_k t_1) & 1 & -A_{k-1} t_1 \sin(\varpi_k t_1) + B_{k-1} t_1 \cos(\varpi_k t_1) \\ \cos(\varpi_k t_2) & \sin(\varpi_k t_2) & 1 & -A_{k-1} t_2 \sin(\varpi_k t_2) + B_{k-1} t_2 \cos(\varpi_k t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos(\varpi_k t_n) & \sin(\varpi_k t_n) & 1 & -A_{k-1} t_n \sin(\varpi_k t_n) + B_{k-1} t_n \cos(\varpi_k t_n) \end{bmatrix}; \quad x_k = \begin{bmatrix} A_k \\ B_k \\ D_k \\ \Delta\varpi_k \end{bmatrix}$$

e) 使式(D.3)达到最小的最小二乘解用矩阵形式表示如下:

$$\hat{x}_k = (\Psi_k^T \Psi_k)^{-1} (\Psi_k^T y)$$

f) 按下式计算幅度 C_k 和相位 θ_k :

$$\hat{y}_i = C_k \cos(\omega_k \cdot t_i + \theta_k) + D_k$$

其中:

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$$

$$\theta_k = \begin{cases} \arctan \left[\frac{-B_k}{A_k} \right], & A_k \geq 0 \\ \arctan \left[\frac{-B_k}{A_k} \right] + \pi, & A_k < 0 \end{cases}$$

g) 重复步骤b)~f), 直到 A_k 、 B_k 、 ω_k 和 D_k (或 C_k 、 ω_k 、 θ_k 和 D_k) 的变化小到满足要求。拟合残差如下:

$$r_i = y_i - A_k \cos(\omega_k t_i) - B_k \sin(\omega_k t_i) - D_k$$

拟合残差的有效值如下:

$$\rho = \varepsilon_{rms} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} r_i^2}$$

D.2.2 正弦波形序列四参数最小二乘拟合——非矩阵叠代算法

对采集记录的数据序列估计一个角频率初始值 ω 和相位初始值 θ , 这里的相位指的是记录中的第一个点对应的相位。角频率用每秒的弧度数来表示, 可以用离散傅里叶变换(DFT)或计算序列过零次数得到, 也可以直接使用输入信号频率算得。

相位用弧度来表示, 可以按D.1节中所述三参数法计算得到。或者用下面的公式计算得到:

$$\theta = [\text{sgn}(y_2 - y_1)] \arccos \left(\frac{y_1 - D}{C} \right)$$

其中:

$$\text{sgn}(y_2 - y_1) = \begin{cases} 1 & y_2 > y_1 \\ 0 & y_2 = y_1 \\ -1 & y_2 < y_1 \end{cases}$$

y_1 是对应于 $t=0$ 的第一个样本点, y_2 是紧跟着 y_1 的下一个样本点, D 、 C 分别是正弦波的直流偏移和幅度。

使用上式计算时, 估计波形幅度可以参照如下方法:

① 如果波形数据序列的噪声不大, 用记录数据中的最大值和最小值的代数差的一半作为波形幅度。

② 用众数法找最大和最小值, 计算波形幅度。

估计偏移的方法:

① 可以使用记录中的最大值和最小值之和的一半。

② 取整数个周期内数据的平均值。注意, 如果在每个周期中点数太少, 符号函数 $\text{sgn}(y_2 - y_1)$ 可能给出不正确的结果。特别是在 $\arccos(*)$ 值接近0或 π 时。

设数据记录序列中包含了一系列时刻 t_i 的取样 y_i , 用以估计 ω 和 θ , 计算下面的16个和:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i; \quad \sum_{i=0}^{n-1} y_i; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i y_i; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i y_i; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \beta_i; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i^2; \quad \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^2$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} y_i^2; \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i t_i y_i; \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \beta_i t_i; \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i^2 t_i; \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i^2 t_i^2; \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i t_i; \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i t_i; \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i t_i^2$$

其中：

$$\alpha_i = \cos(\varpi \cdot t_i + \theta); \beta_i = \sin(\varpi \cdot t_i + \theta)$$

现在使用 ϖ 和 θ 的估计值，计算：

$$\psi = \varpi + \frac{a_{22}R - a_{12}S}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}; \phi = \theta + \frac{a_{11}S - a_{21}R}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

其中：

$$a_{11} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i t_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i t_i (\beta_i - \bar{\beta})}{\left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right]^2} - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i t_i^2 (\beta_i - \bar{\beta})}{\left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right]^2}$$

$$a_{12} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i t_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\beta_i - \bar{\beta})}{\left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right]^2} - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i t_i (\beta_i - \bar{\beta})}{\left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right]^2}$$

$$a_{21} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i t_i (\beta_i - \bar{\beta})}{\left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right]^2} - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i t_i (\beta_i - \bar{\beta})}{\left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right]^2}$$

$$a_{22} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\beta_i - \bar{\beta})}{\left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right]^2} - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i (\beta_i - \bar{\beta})}{\left[\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha}) \right]^2}$$

$$R = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i t_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (y_i - \bar{y})} - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} t_i \beta_i (\alpha_i - \bar{\alpha})}{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha})}; S = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (y_i - \bar{y})} - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i (\alpha_i - \bar{\alpha})}{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (\alpha_i - \bar{\alpha})}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i; \bar{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i; \bar{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i$$

使用 ψ 和 ϕ 作为新的 ϖ 和 θ 估计值，重复上述过程，直到两者的差别小到满足要求，产生其拟合函数的形式如下：

$$\hat{y}_i = C \cos(\psi \cdot t_i + \phi) + D$$

可按下列式子计算：

$$C = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i (y_i - \bar{y})(\alpha_i + \beta_i + \beta_i t_i)}{\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha_i - \bar{\alpha})(\alpha_i + \beta_i + \beta_i t_i)}$$

$$D = \bar{y} - C\bar{\alpha}$$

残差有效值为 $\rho = \left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

这里,

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i^2 + \frac{C^2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i^2 - 2 \frac{C}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i y_i + D^2 - 2D\bar{y} + 2CD\bar{\alpha} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - C\alpha_i - D)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i - \hat{y}_i)^2\end{aligned}$$

由于这是一个叠代过程, 所以对一些误差很大的估计初始值 ω 和 θ 有可能引起发散。

D.2.3 正弦波形序列四参数最小二乘曲线拟合算法——三参数迭代算法

三参数正弦曲线拟合是一种闭合的线性过程, 绝对收敛。四参数正弦曲线拟合则不然, 尚无确切的数学公式可直接计算获得其拟合参数, 目前所有已知的方法都属非线性迭代拟合过程, 若拟合初始值距离目标值“太远”, 则很容易导致迭代过程发散或收敛到局部最优点而不是总体最优点上, 致使拟合结果错误。而拟合初始值是否与目标值足够“接近”, 尚缺乏实际判据, 很难对其进行量化控制, 只能在拟合不收敛时, 重新选取初始值或重新获取测量数据。下面介绍的过程具有绝对收敛的特点。

设待估计的正弦波形序列 $y_i (i=0, \dots, n-1)$ 的模型为:

$$y(t_i) = C \cos(\omega \cdot t_i + \theta) + D$$

假设待估计的正弦波角频率目标值为 ω , 待估计的正弦波采样序列所含信号周期个数为 p , 若 $\Delta\omega_{max} = \omega/p$, 则在区间 $[\omega - \Delta\omega_{max}, \omega + \Delta\omega_{max}]$ 内的任意角频率 ω 下, 残差平方和 $\varepsilon(\omega)$ 的极值都存在且唯一。这样, 便将四参数正弦波曲线拟合中, 对幅度、频率、相位、直流分量四个参数的四维非线性搜索, 变成了对频率分量 ω 造成的一维线性搜索, 可保证在区间 $[\omega - \Delta\omega_{max}, \omega + \Delta\omega_{max}]$ 内, 用三参数拟合法实现的四参数正弦曲线拟合过程绝对收敛。该四参数拟合过程如下:

(1) 设定拟合迭代停止条件为 h_e ;

(2) 对已知时刻 t_0, t_1, \dots, t_{n-1} 的正弦波采集样本 y_0, y_1, \dots, y_{n-1} 。使用周期计点法或其它方法获得每个信号周期内所含信号采样点数 m , 并获得序列所含信号周期个数 $p = n/m$; 则频率 ω 的估计值 $\omega = 2\pi\nu/m$; 其收敛区间界为: $\Delta\omega_{max} = \omega/p = 2\pi\nu/n$; $\nu = (n-1)/(t_n - t_1)$;

(3) 确定拟合频率 ω 的收敛区间 $[\omega - \Delta\omega_{max}, \omega + \Delta\omega_{max}] = [\omega_L, \omega_R]$, 则, 迭代左边界频率: $\omega_L = \omega - 2\pi\nu/n$; 迭代右边界频率: $\omega_R = \omega + 2\pi\nu/n$; 中值频率: $\omega_M = \omega_L + 0.618 \times (\omega_R - \omega_L)$; $\omega_T = \omega_R - 0.618 \times (\omega_R - \omega_L)$;

(4) 在 ω_L 上执行三参数正弦曲线拟合, 获得 $C_L, \theta_L, D_L, \rho_L$; 在 ω_R 上执行三参数正弦曲线拟合, 获得 $C_R, \theta_R, D_R, \rho_R$; 在 ω_M 上执行三参数正弦曲线拟合, 获得 $C_M, \theta_M, D_M, \rho_M$; 在 ω_T 上执行三参数正弦曲线拟合, 获得 $C_T, \theta_T, D_T, \rho_T$;

(5) 若 $\rho_M < \rho_T$, 则 $\rho = \rho_M$, 有 $\omega \in [\omega_T, \omega_R]$, $\omega_L = \omega_T$, $\omega_T = \omega_M$; $\omega_M = \omega_L + 0.618 \times (\omega_R - \omega_L)$;

若 $\rho_M > \rho_T$, 则 $\rho = \rho_T$, 有 $\omega \in [\omega_L, \omega_M]$, $\omega_R = \omega_M$, $\omega_M = \omega_T$; $\omega_T = \omega_R - 0.618 \times (\omega_R - \omega_L)$;

(6) 若 $|(\rho_M(k) - \rho_T(k))/\rho_T(k)| < h_e$, 则停止迭代, 并且,

$\rho = \rho_T$ 时, 获得四参数拟合正弦曲线参数为 $C = C_T, \omega = \omega_T, \theta = \theta_T, D = D_T, \rho$, 拟合结束;

$\rho = \rho_M$ 时, 获得四参数拟合正弦曲线参数为 $C = C_M, \omega = \omega_M, \theta = \theta_M, D = D_M, \rho$, 拟合结束;

否则, 重复(4)~(6)的过程。

附录 E

周期波形的等效采样方法

E.1 概述

通常，数据采集系统是在满足采样定理的条件下使用的。其先决条件是，对于待采集的信号波形来说，采集速率足够高，采样间隔足够小，才能正确描述被测信号。

实际数据采集系统的采样间隔是有下限的，不能任意小。当其阶跃响应的主过渡过程小于其最小采样间隔时，阶跃响应波形便无法被直接描述，因而无法直接进行数据采集系统动态响应特性的评价。关于如何在这种情况下也能正确描述出数据采集系统阶跃响应过程，以更高时间分辨力采集观测输入波形，本附录给出了解决该问题的一种方法——“周期倍差法”，其前提是输入必须是周期信号。

它是一种软件等效采样方法，在硬件采样速率不变的情况下，可用于提高等效采样时间分辨力。具体过程为通过数据采集系统采样间隔的整数倍与输入信号周期的整数倍间的微小偏差，获得小于实时采样间隔的等效采样间隔，达到获取其瞬态响应的目的。

E.2 基本原理

周期倍差法的基本思想，是给数据采集系统加载一个周期已知的周期性动态信号，如正弦波、方波等，当采样间隔 T_1 的整数 p 倍与信号周期 T_2 的整数 q 倍具有极微小偏差 T_3 时，依据信号及采样的周期性特征，将采集数据每间隔 p 个数据抽取一个数据组成一个子集，顺序排列，便组成了等效采样间隔为 $T_3=p \cdot T_1 - q \cdot T_2$ 的数据采集系统的动态响应波形。

q 可为任一整数，通过调整 q 值，可以使得 $q \cdot T_2 \leq p \cdot T_1 < (q+1) \cdot T_2$ ，即 $0 \leq T_3 < T_2$ ；同样，通过适当选择 p 值可以同时使得 $0 \leq T_3 < T_1$ 。通过调整 p 、 q 组合，可生成较小的等效采样间隔 T_3 。

在不考虑器件特性限制的条件下，只要信号周期 T_2 可以任意变化，人们就可以获得任意等效采样间隔 T_3 的响应序列。具体过程如下：

设数据采集系统的采样间隔为 T_1 ，采集数据个数 n ，信号的周期为 T_2 ，希望获得的等效采样间隔为 T_3 。则，通过适当选取输入信号的周期 T_2 ，使得采样间隔 T_1 的整数 p 倍与信号周期 T_2 的整数 q 倍之差，为所需要的等效采样间隔 T_3 ，即：

$$T_3 = p \cdot T_1 - q \cdot T_2 \quad (\text{E.2.1})$$

其中， p 与 q 均为正整数，且 $p < n$ 。当 $T_3 > 0$ 时，表明取样序列时序与实际信号相同；当 $T_3 < 0$ 时，表明取样序列时序与实际信号恰好相反。为方便起见，假设 n 为 p 的倍数，即 $n = p \cdot L$ 。

将数据采集系统对输入信号的取样数据 $x_i (i=0, \dots, n-1)$ 中的 $x_j, x_{p+j}, \dots, x_{p(L-1)+j} (j=0, \dots, p-1)$ 顺序排列，便组成了数据采集系统具有等效采样间隔 T_3 的输入信号的响应波形。由该序列 $x_i (i=0, \dots, n-1)$ 共可获得 p 段不同的具有等效采样间隔 T_3 的响应波形，每段长度为 L 。

当 n 足够大，使得 $T_3 \cdot L > T_2$ ，则每一段上述响应波形均可完全描述一个信号周期的特性，由此解决了由于采样间隔的限制而无法评价数据采集系统的阶跃响应的问题。

E.3 特例 1: $p=1$ 情况

在式(D.1)中，当 $p=1$ 时，数据采集系统的采样间隔 T_1 大于信号周期 T_2 （此时采样定理的条件是不满足的）。“周期倍差法”处于最简单的状况，所获得的采集数据顺序排列组成的波形即是具有等效采样间隔 T_3 的响应曲线，无须任何其它变换和处理。这对于中、低速数据采集系统动态响应评价极为有利，是一种良好的应用状况。

附录 F

正弦波形序列幅度估计方法

正弦波形序列的幅度估计，是指不太关心其它参数时，仅仅对其幅度所进行的估计行为。此时，可以使用一些简单易行的方法。通常有峰峰值法、有效值法、平均值法等。

F.1 峰峰值法

正弦波采样序列 $\{x_i\}$, $i=1, \dots, n$ ，通过比较法，寻找出其最小值 x_{\min} ，以及最大值 x_{\max} ，则正弦波采样序列的峰值幅度 A ，中值 x_{mid} 。

$$x_{\min} = \min \{x_i\}_{i=1, \dots, n} \quad (\text{F.1.1})$$

$$x_{\max} = \max \{x_i\}_{i=1, \dots, n} \quad (\text{F.1.2})$$

$$A = (x_{\max} - x_{\min}) / 2 \quad (\text{F.1.3})$$

$$x_{\text{mid}} = (x_{\max} + x_{\min}) / 2 \quad (\text{F.1.4})$$

F.2 有效值法

正弦波采样序列 $\{x_i\}$, $i=1, \dots, n$ ，通过中值点（也称过零点）截取整数个周期的波形，形成整周期波形序列 $\{x_j\}$, $j=1, \dots, m$ ，则，按有效值法计算，获得正弦波采样序列的峰值幅度为 A ，中值 $x_{\text{mid}} = \bar{x}$ 。

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_j \quad (\text{F.2.1})$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{m-1} \sum_{j=1}^m (x_j - \bar{x})^2} \quad (\text{F.2.2})$$

F.3 平均值法

正弦波采样序列 $\{x_i\}$, $i=1, \dots, n$ ，通过中值点（也称过零点）截取整数个周期的波形，形成整周期波形序列 $\{x_j\}$, $j=1, \dots, m$ ，则，按平均值法计算，获得正弦波采样序列的峰值幅度为 A ，中值 $x_{\text{mid}} = \bar{x}$ 。

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_j \quad (\text{F.3.1})$$

$$\bar{x}_p = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |x_j - \bar{x}| \quad (\text{F.3.2})$$

$$A = \frac{\pi \cdot \bar{x}_p}{2} \quad (\text{F.3.3})$$

附录 G (资料性附录)

测量不确定度评定示例

G.1 最小二乘独立线性度的测量不确定度评定

G.1.1 测量原理与方法

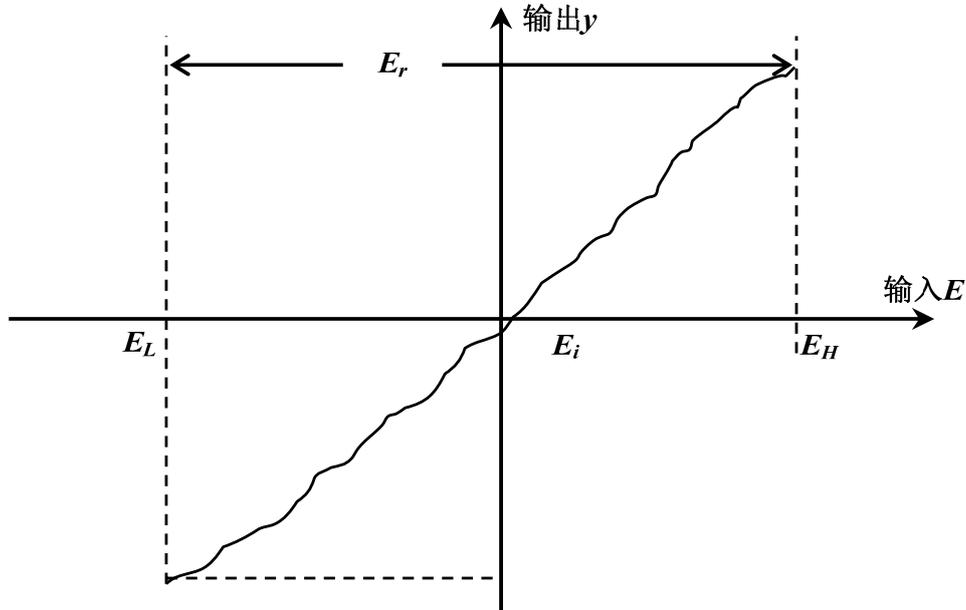


图 G.1.1 数据采集系统输入输出特性

如图 G.1.1 所示, 在测量范围(E_L, E_H)内, 数据采集系统是线性系统。假设其输入 E 和输出 y 关系满足公式

$$y(E) = G_0 \cdot E + D_0 \dots\dots\dots (G.1.1)$$

其中, G_0 为通道直流增益; D_0 为通道的直流偏移。

对测量通道依次输入符合式(G.1.2)的信号 $E_i (i=1, \dots, m)$

$$E_L < E_1 < E_2 < \dots < E_m < E_H \dots\dots\dots (G.1.2)$$

式中, E_L ——通道的测量范围下限;

E_H ——通道的测量范围上限; 量程 $E_r = |E_H - E_L|$ 。

分别用对应 E_i 的采集数据 $y_{ij} (j=1, \dots, n)$ 。按式(G.1.3)计算各平均值

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n y_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, m) \dots\dots\dots (G.1.3)$$

测量值 y_{ij} 的实验方差

$$s^2(y_{ij}) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

均值 \bar{y}_i 的实验方差

$$s^2(\bar{y}_i) = \frac{s^2(y_{ij})}{n}$$

与式(G.1.1)的理想关系相比, 实际输入值 E_i 所对应的理想输出值 $y(E_i)$ 与测量值 \bar{y}_i 间将有偏差 ε_i , 即

$$\varepsilon_i = \bar{y}_i - G_0 \cdot E_i - D_0$$

当偏差 ε_i 的平方和最小时, 即

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^m (\bar{y}_i - G_0 \cdot E_i - D_0)^2 = \min$$

可得 G_0 与 D_0 的最小二乘估计值 G 和 D

$$G = \frac{m \sum_{i=1}^m \bar{y}_i E_i - (\sum_{i=1}^m \bar{y}_i)(\sum_{i=1}^m E_i)}{m \sum_{i=1}^m E_i^2 - (\sum_{i=1}^m E_i)^2} = \frac{\overline{R_{yE}} - \bar{y} \cdot \bar{E}}{\overline{E^2} - \bar{E}^2} \dots\dots\dots (G.1.4)$$

$$D = \frac{(\sum_{i=1}^m \bar{y}_i)(\sum_{i=1}^m E_i^2) - (\sum_{i=1}^m \bar{y}_i E_i)(\sum_{i=1}^m E_i)}{m \sum_{i=1}^m E_i^2 - (\sum_{i=1}^m E_i)^2} = \frac{\bar{y} \cdot \overline{E^2} - \overline{R_{yE}} \cdot \bar{E}}{\overline{E^2} - \bar{E}^2} \dots\dots\dots (G.1.5)$$

其中

$$\overline{R_{yE}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{y}_i E_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{y}_i; \quad \bar{E} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E_i; \quad \overline{E^2} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E_i^2。$$

非线性误差

$$L_i = \frac{\bar{y}_i - G \cdot E_i - D}{G \cdot E_r} \quad (i=1, \dots, m) \dots\dots\dots (G.1.6)$$

线性度

$$L = L_{\max} = \max \left| \frac{\bar{y}_j - G \cdot E_j - D}{G \cdot E_r} \right|_{j=1, \dots, m} \dots\dots\dots (G.1.7)$$

G.1.2 测量不确定度模型

从式(G.1.6)~(G.1.7)可见, 线性度 L 的测量不确定度 $u(L)$ 的主要来源:

a) 直流标准信号 E_i 的不确定度 $u(E_i)$;

b) 数据采集引入的不确定度 $u(\bar{y}_i)$ 。该分量主要包含两部分内容: E_i 的测量重复性引入的不确定度 $u_1(\bar{y}_i)$; 数据采集系统测量分辨力引入的不确定度 $u_2(\bar{y}_i)$ 。显然, 两者不相关,

$$u(\bar{y}_i) = \sqrt{u_1^2(\bar{y}_i) + u_2^2(\bar{y}_i)}。$$

c) 对于以有限个固定输入点 $E_i(i=1, \dots, m)$ 估计线性度来说, 上述 a)、b) 描述的不确定度来源已经足够, 但最小二乘法估计的直流增益和直流偏移是全量程范围内无限多个点的转换特性, 在以有限个点代替无限个点来进行测量估计时, 由于转换特性存在非线性误差, 导致当输入点的个数和位置发生变化时, 也将给直流增益和直流偏移的测量带来不确定因素, 进而给线性度的估计带来不确定因素。

G.1.2.1 对于有限个固定输入点 $E_i(i=1, \dots, m)$ 情况

设, $L=L_j$, 则由式(G.1.7)得:

$$dL = \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial E_i} dE_i + \sum_{i=1}^m \frac{\partial L}{\partial \bar{y}_i} d\bar{y}_i = \sum_{i=1}^m (c_L(E_i) \cdot dE_i + c_L(\bar{y}_i) \cdot d\bar{y}_i) \dots\dots\dots (G.1.8)$$

1)、 $L_j > 0$ 情况

由式(G.1.7)得:

$i \neq j$ 时, 得灵敏系数

$$c_L(E_i) = \frac{\partial L}{\partial E_i} = \frac{\partial L_j}{\partial E_i} = \frac{-1}{GE_r} \cdot \left(\frac{\partial D}{\partial E_i} + \frac{\bar{y}_j - D}{G} \cdot \frac{\partial G}{\partial E_i} \right)$$

$$= \frac{2E_i \bar{y} - \bar{y}_i \bar{E} - \bar{R}_{yE} + (\bar{y}_j - D)(\bar{y}_i - \bar{y}) / G - 2\bar{y}_j (E_i - \bar{E})}{-mGE_r(E^2 - \bar{E}^2)} \dots\dots\dots (G.1.9)$$

$i=j$ 时, 得灵敏系数

$$c_L(E_j) = \frac{\partial L}{\partial E_j} = \frac{\partial L_j}{\partial E_j} = \frac{-1}{GE_r} \cdot \left(\frac{\partial D}{\partial E_j} + \frac{\bar{y}_j - D}{G} \cdot \frac{\partial G}{\partial E_j} + G \right)$$

$$= \frac{\bar{y}_j \bar{E} - \bar{R}_{yE} + (\bar{y}_j - \bar{y})[(\bar{y}_j - D) / G - 2E_j]}{-mGE_r(E^2 - \bar{E}^2)} - \frac{1}{E_r} \dots\dots\dots (G.1.10)$$

$i \neq j$ 时, 由式(G.1.7)得灵敏系数

$$c_L(\bar{y}_i) = \frac{\partial L}{\partial \bar{y}_i} = \frac{\partial L_j}{\partial \bar{y}_i} = \frac{-1}{GE_r} \cdot \left(\frac{\partial D}{\partial \bar{y}_i} + \frac{\bar{y}_j - D}{G} \cdot \frac{\partial G}{\partial \bar{y}_i} \right)$$

$$= \frac{\bar{E}^2 - E_i \bar{E} + (E_i - \bar{E})(\bar{y}_j - D) / G}{-mGE_r(E^2 - \bar{E}^2)} \dots\dots\dots (G.1.11)$$

$i=j$ 时, 得灵敏系数

$$c_L(\bar{y}_j) = \frac{\partial L}{\partial \bar{y}_j} = \frac{\partial L_j}{\partial \bar{y}_j} = \frac{-1}{GE_r} \cdot \left(\frac{\partial D}{\partial \bar{y}_j} + \frac{\bar{y}_j - D}{G} \cdot \frac{\partial G}{\partial \bar{y}_j} - 1 \right)$$

$$= \frac{\bar{E}^2 - E_j \bar{E} + (E_j - \bar{E})(\bar{y}_j - D) / G}{-mGE_r(E^2 - \bar{E}^2)} + \frac{1}{GE_r} \dots\dots\dots (G.1.12)$$

2)、 $L_j < 0$ 情况

由式(G.1.7)得:

$$c_L(E_i) = \frac{\partial L}{\partial E_i} = -\frac{\partial L_j}{\partial E_i}; \quad c_L(\bar{y}_i) = \frac{\partial L}{\partial \bar{y}_i} = -\frac{\partial L_j}{\partial \bar{y}_i}$$

由测量值 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 对于输入 X_i 的测量值 x_i ($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$) 的不确定度传递公式:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right) u(x_i, x_j)} \dots\dots\dots (G.1.13)$$

$$u(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \dots\dots\dots (G.1.14)$$

式中, x_i ——为输入 X_i 的测量值; x_j ——为输入 X_j 的测量值, ($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$);

$u(x_i)$ ——为 x_i 的标准不确定度; $u(x_j)$ ——为 x_j 的标准不确定度, ($i \neq j$);

$u(x_i, x_j)$ ——为 x_i 、 x_j 的协方差估计值, ($i \neq j$);

$r(x_i, x_j)$ ——为 x_i 、 x_j 的相关系数估计值, ($i \neq j$);

本测量过程中, 对于相关系数的估计值, 当 ($i \neq j$) 时, 显然有:

$r(E_i, E_j) = 0$; 不同的输入值之间不相关;

$r(\bar{y}_i, \bar{y}_j) = 0$; 不同的测量值之间可以认为是不相关;

$r(E_i, \bar{y}_i) = r(\bar{y}_i, E_i) = 1$, ($i=1, \dots, m$); 测量值与其输入值之间可以认为是完全相关;

则, 由随机误差造成的线性度 L 的不确定度:

$$u_{c1}(L) = \sqrt{\sum_{i=1}^m c_L^2(E_i) u^2(E_i) + \sum_{i=1}^m c_L^2(\bar{y}_i) u^2(\bar{y}_i) + 2 \sum_{i=1}^m c_L(E_i) c_L(\bar{y}_i) u(E_i) u(\bar{y}_i)}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_L(E_i) \cdot u(E_i) + c_L(\bar{y}_i) \cdot u(\bar{y}_i))^2} \dots\dots\dots (G.1.15)$$

G.1.2.2 输入点发生变化情况

输入点发生变化时，由于非线性误差存在，将给直流增益和直流偏移的估计带来不确定因素，进而给线性度的估计带来不确定因素。此时，输入 E_i 为标准值，其测量值为 $y_{iq}(i=1, \dots, m; q=1, \dots, n)$ ，它带来的不确定因素只影响直流增益和直流偏移的估计值，则

$$y_{iq} = G_{iq} E_i + D_{iq} + \varepsilon_{iq} \dots\dots\dots (G.1.16)$$

$$\bar{y}_i = G_i E_i + D_i + \varepsilon_i \dots\dots\dots (G.1.17)$$

其中

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n y_{iq}; \quad G_i = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n G_{iq}; \quad D_i = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n D_{iq}; \quad \varepsilon_i = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n \varepsilon_{iq}$$

可得非线性误差在估计直流增益 G 和直流偏移 D 时，所带来的实验标准偏差 $s_L(G)$ 和 $s_L(D)$ ，二者的相关系数 $r(G, D)$

$$s_L^2 = \frac{1}{m-2} \cdot \sum_{i=1}^m [\bar{y}_i - G \cdot E_i - D]^2 \dots\dots\dots (G.1.18)$$

$$s_L^2(G) = \frac{m \cdot s_L^2}{m \sum_{i=1}^m E_i^2 - (\sum_{i=1}^m E_i)^2} = \frac{s_L^2 / m}{E^2 - \bar{E}^2} \dots\dots\dots (G.1.19)$$

$$s_L^2(D) = \frac{s_L^2 \cdot \sum_{i=1}^m E_i^2}{m \sum_{i=1}^m E_i^2 - (\sum_{i=1}^m E_i)^2} = \frac{\bar{E}^2 \cdot s_L^2 / m}{E^2 - \bar{E}^2} \dots\dots\dots (G.1.20)$$

$$r(G, D) = \frac{\sum_{i=1}^m E_i}{\sqrt{m \sum_{i=1}^m E_i^2}} = \frac{\bar{E}}{\sqrt{E^2}} \dots\dots\dots (G.1.21)$$

令， $\hat{\varepsilon}_{iq} = \varepsilon_{iq} - \varepsilon_i$ ；则显然， $\frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n \hat{\varepsilon}_{iq} = 0$ ，可以认为， $\hat{\varepsilon}_{iq}$ 是零均值白噪声，且 $\hat{\varepsilon}_{iq}$ 与 G_{iq} 和 D_{iq} 均无关，即

$$\frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n \hat{\varepsilon}_{iq} (G_{iq} - G_i) = 0$$

$$\frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n \hat{\varepsilon}_{iq} (D_{iq} - D_i) = 0$$

而

$$\frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n (G_{iq} - G_i)^2 = s_L^2(G)$$

$$\frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n (D_{iq} - D_i)^2 = s_L^2(D)$$

$$Q_1 = r(G_{iq}, D_{iq}) u_L(G_{iq}) u_L(D_{iq}) = \frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n (G_{iq} - G_i)(D_{iq} - D_i)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n \frac{(G_{iq} - G_i)(D_{iq} - D_i)}{s_L(G)s_L(D)} s_L(G)s_L(D) \\
&= r(G, D)s_L(G)s_L(D) = \frac{1}{m} \cdot \frac{\bar{E} \cdot s_L^2}{E^2 - \bar{E}^2} \\
Q_2 &= r(y_{iq}, D_{iq})u_L(y_{iq})u_L(D_{iq}) = \frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n (y_{iq} - \bar{y}_i)(D_{iq} - D_i) \\
&= \sum_{q=1}^n \frac{[(G_{iq} - G_i)E_i + (D_{iq} - D_i) + \hat{\varepsilon}_{iq}](D_{iq} - D_i)}{n-1} \\
&= r(G, D)s_L(G)s_L(D)E_i + s_L^2(D) = \frac{1}{m} \cdot \frac{(\bar{E}^2 + E_i\bar{E})s_L^2}{E^2 - \bar{E}^2} \\
Q_3 &= r(y_{iq}, G_{iq})u_L(y_{iq})u_L(G_{iq}) = \frac{1}{n-1} \sum_{q=1}^n (y_{iq} - \bar{y}_i)(G_{iq} - G_i) \\
&= \sum_{q=1}^n \frac{[(G_{iq} - G_i)E_i + (D_{iq} - D_i) + \hat{\varepsilon}_{iq}](G_{iq} - G_i)}{n-1} \\
&= s_L^2(G)E_i + r(G, D)s_L(G)s_L(D) = \frac{1}{m} \cdot \frac{(E_i + \bar{E})s_L^2}{E^2 - \bar{E}^2}
\end{aligned}$$

非线性误差和测量点变化给测量值 y_{iq} 、直流增益 G 与直流偏移 D 的带来的不确定度:

$$u_L(y_{iq})=s_L(y_{iq}) \dots\dots\dots (G.1.22)$$

$$u_L(G)=s_L(G) \dots\dots\dots (G.1.23)$$

$$u_L(D)=s_L(D) \dots\dots\dots (G.1.24)$$

由式(G.1.7)可得

$$c(\bar{y}_i) = \frac{\partial L}{\partial \bar{y}_i} = \frac{1}{GE_r}; \quad c(G) = \frac{\partial L}{\partial G} = -\frac{\bar{y}_i - D}{G^2 E_r}; \quad c(D) = \frac{\partial L}{\partial D} = -\frac{1}{GE_r}; \quad u_L(\bar{y}_i) = u(\bar{y}_i), \quad c(\bar{y}_i)u_L(\bar{y}_i)$$

对 L 不确定度的贡献已经在 $u_{c1}(L)$ 中计入, 故, 由式(G.1.13)可得非线性误差给线性度带来的不确定度

$$\begin{aligned}
u_L(L) &= \sqrt{c^2(G)u_L^2(G) + c^2(D)u_L^2(D) + 2(c(G)c(D)Q_1 + c(\bar{y}_i)c(D)Q_2 + c(\bar{y}_i)c(G)Q_3)} \\
&= \frac{s_L}{GE_r} \cdot \sqrt{\frac{[(\bar{y}_i - D)/G - E_i]^2 - E_i^2 - \bar{E}^2 - 2E_i\bar{E}}{m(E^2 - \bar{E}^2)}} \dots\dots\dots (G.1.25)
\end{aligned}$$

其自由度 $\nu_L=m-(\text{独立变量个数})=m-3$ 。

G.1.2.3 线性度的合成标准不确定度

由于 $u_L(L)$ 主要是由于非线性误差造成的不确定度, $u_{c1}(L)$ 主要是随机误差造成的不确定度, 故可以认为, $u_L(L)$ 与 $u_{c1}(L)$ 不相关, 则有

$$u_c(L) = \sqrt{u_{c1}^2(L) + u_L^2(L)} \dots\dots\dots (G.1.26)$$

G.1.3 测量数据及处理

以某型数据采集系统为被校系统, 其测量范围设为 $(E_L, E_H)=(-5V, 5V)$, A/D 位数为 $b=8\text{bits}$; 则校准源的输入值 E_i 按上述式(G.1.2)给出如表 G.1.2 所示, 各输入值 E_i 的允许误差极限 $\pm\Delta_i$ 由校准源说明书获得, 对应的被校数据采集系统测量值的平均值 \bar{y}_i 、均值方差 $s^2(\bar{y}_i)$ 和不确定度 $u(\bar{y}_i)$ 可相应获得, 如表 G.1.2 所示。

a) 直流标准信号 E_i 的不确定度, 按 B 类评价方法获得。假设信号 E_i 的误差在其允许误差极限 $[-\Delta_{i-}, +\Delta_{i+}]$ 内服从均匀分布, 则误差区间半宽度 $a_i = (\Delta_{i+} + \Delta_{i-})/2$, E_i 的不确定度 $u(E_i) = \frac{a_i}{\sqrt{3}}$, 其自由度 $\nu_{E_i} = \infty$ 。 Δ_{i+} 与 Δ_{i-} 由说明书获得, 如表 G.1.1 所示:

表 G.1.1: 直流标准电压 E_i 的最大允许误差

量 程	分辨力	允许误差极限 $[-\Delta_{i-}, +\Delta_{i+}]$
220mV	10nV	$\pm 0.0009\%$ 读值 $\pm 0.8\mu\text{V}$
2.2V	100nV	$\pm 0.0008\%$ 读值 $\pm 1.2\mu\text{V}$
11V	1 μV	$\pm 0.0008\%$ 读值 $\pm 4\mu\text{V}$

b) 被校数据采集系统测量重复性引入的不确定度, 按照 A 类评价方法获得, 在测量点 E_i 上有

$$u_1(\bar{y}_i) = s(\bar{y}_i)$$

其自由度 $\nu_{1y} = n - 1 = 999$ 。

由数据采集系统测量范围 $(E_L, E_H) = (-5\text{V}, 5\text{V})$, A/D 位数为 $b = 8\text{bits}$; 得量化误差为

$$\text{LSB} = (E_H - E_L) / 2^b = 3.90625 \times 10^{-2} \text{V}$$

设分辨力造成的误差在 $(-0.5 \times \text{LSB}, 0.5 \times \text{LSB})$ 内服从均匀分布, 则

$$a = 0.5 \times \text{LSB} = 1.953125 \times 10^{-2} \text{V}$$

$$u_2(\bar{y}_i) = \frac{a}{\sqrt{3}} = 1.127670 \times 10^{-2} \text{V}$$

其自由度 $\nu_{2y} = \infty$ 。由 $u_1(\bar{y}_i)$ 、 $u_2(\bar{y}_i)$ 合成 $u(\bar{y}_i)$ 。

表 G.1.2 范围 $(-5\text{V}, 5\text{V})$ 内测量数据及处理结果

序号 i	E_i (V)	a_i (μV)	$u(E_i)$ (μV)	\bar{y}_i (V)	n	$s(\bar{y}_i)$ (mV)	$u(\bar{y}_i)$ (mV)
1	-4.6875	41.5	24.0	-4.58998	1000	1.55	11.3
2	-4.0625	36.5	21.1	-3.97004	1000	1.64	11.3
3	-3.4375	31.5	18.2	-3.33784	1000	1.55	11.3
4	-2.8125	26.5	15.3	-2.70728	1000	1.55	11.3
5	-2.1875	18.7	10.8	-2.09078	1000	1.52	11.3
6	-1.5625	13.7	7.91	-1.45432	1000	1.52	11.3
7	-0.9375	8.70	5.02	-0.834939	1000	1.49	11.3
8	-0.3125	3.70	2.14	-0.202492	1000	1.49	11.3
9	0.3125	3.70	2.14	0.418474	1000	1.61	11.3
10	0.9375	8.70	5.02	1.04458	1000	1.55	11.3
11	1.5625	13.7	7.91	1.67738	1000	1.61	11.3
12	2.1875	18.7	10.8	2.29848	1000	1.52	11.3
13	2.8125	26.5	15.3	2.92457	1000	1.61	11.3
14	3.4375	31.5	18.2	3.55496	1000	1.52	11.3
15	4.0625	36.5	21.1	4.18852	1000	1.52	11.3
16	4.6875	41.5	24.0	4.80928	1000	1.58	11.3

G.1.4 合成不确定度计算

由表 G.1.2 所述数据, 按式(G.1.4)~(G.1.5)可得直流增益和直流偏移的最小二乘估计值为

$$G = 1.0028; D = 0.108\text{V}。$$

按式(G.1.6)~(G.1.7)可得线性度的估计值为: $L = 6.5 \times 10^{-4}$, $j = 15$ 。

按式(G.1.9)~(G.1.12)可得各灵敏系数如下表 G.1.3 所示:

表 G.1.3 测量数据对应的灵敏系数

序号	E_i	\bar{y}_i	$c_L(E_i)$	$c_L(\bar{y}_i)$
----	-------	-------------	------------	------------------

i	(V)	(V)		
1	-4.6875	-4.58998	-8.119×10^{-3}	8.088×10^{-3}
2	-4.0625	-3.97004	-6.184×10^{-3}	6.179×10^{-3}
3	-3.4375	-3.33784	-4.286×10^{-3}	4.269×10^{-3}
4	-2.8125	-2.70728	-2.382×10^{-3}	2.360×10^{-3}
5	-2.1875	-2.09078	-4.362×10^{-4}	4.506×10^{-4}
6	-1.5625	-1.45432	1.449×10^{-3}	-1.459×10^{-3}
7	-0.9375	-0.834939	3.386×10^{-3}	-3.368×10^{-3}
8	-0.3125	-0.202492	5.284×10^{-3}	-5.278×10^{-3}
9	0.3125	0.418474	7.216×10^{-3}	-7.187×10^{-3}
10	0.9375	1.04458	9.133×10^{-3}	-9.097×10^{-3}
11	1.5625	1.67738	1.103×10^{-2}	-1.101×10^{-2}
12	2.1875	2.29848	1.296×10^{-2}	-1.292×10^{-2}
13	2.8125	2.92457	1.488×10^{-2}	-1.482×10^{-2}
14	3.4375	3.55496	1.678×10^{-2}	-1.673×10^{-2}
15	4.0625	4.18852	-8.132×10^{-2}	8.107×10^{-2}
16	4.6875	4.80928	2.061×10^{-2}	-2.055×10^{-2}

由表 G.1.2 和表 G.1.3 所示的数据, 按式(G.1.15)计算出由随机误差造成的线性度的不确定度分量

$$u_{c1}(L) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_L(E_i) \cdot u(E_i) + c_L(\bar{y}_i) \cdot u(\bar{y}_i))^2} = 1.012 \times 10^{-3}$$

按式(G.1.25)计算出非线性误差造成的线性度的不确定度

$$u_L(L) = 1.68 \times 10^{-4}$$

按式(G.1.26)计算出线性度的合成标准不确定度

$$u_c(L) = \sqrt{u_{c1}^2(L) + u_L^2(L)} = 1.026 \times 10^{-3}$$

G.1.5 扩展不确定度

由 $\nu_{eff}(L) = \frac{u_c^4(L)}{\sum_i \frac{c_i^4 u_i^4}{\nu_i}} \approx 18276$, 得有效自由度 $\nu_{eff}(L) = 18276$ 。令置信概率 $P = 95\%$, 查 t 分布表

得包含因子 $k = t_p(\nu_{eff}) = t_{95}(18276) = 1.96$, 则扩展不确定度:

$$U(L) = k \times u_c(L) = 1.96 \times 1.026 \times 10^{-3} = 2.0 \times 10^{-3}$$

G.1.6 测量结果的最终表述

最小二乘法获得的独立线性度:

$$L_0 = L \pm U(L) = 6.5 \times 10^{-4} \pm 2.0 \times 10^{-3} \quad (k = 1.96, P = 95\%);$$

其中, \pm 后面是扩展不确定度 $U(L)$, 它的包含因子为 $k = 1.96$, 是由有效自由度 $\nu_{eff} = 18276$, 置信概率 $P = 95\%$, 由 t 分布表查得。

G.2 最小二乘直流增益、直流偏移测量不确定度评定

G.2.1 测量原理与方法

如图 G.2.1 所示, 在测量范围(E_L, E_H)内, 数据采集系统是线性系统, 其输入 E 和输出 y 关系满足公式

$$y(E) = G_0 \cdot E + D_0 \dots \dots \dots (G.2.1)$$

其中, G_0 为通道直流增益; D_0 为通道的直流偏移。

对测量通道依次输入符合式(G.2.2)的信号 $E_i (i = 1, \dots, m)$

$$E_L < E_1 < E_2 < \dots < E_i < \dots < E_m < E_H \dots \dots \dots (G.2.2)$$

式中, E_L 为通道的测量范围下限; E_H 为通道的测量范围上限; 量程 $E_r = |E_H - E_L|$ 。分别用对应 E_i 的采集数据 $y_{ij}(j=1, \dots, n)$, 按式(G.2.3)计算各平均值

$$\bar{y}_i = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n y_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad \dots\dots\dots (G.2.3)$$

测量值 y_{ij} 的方差

$$s^2(y_{ij}) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \bar{y}_i)^2$$

均值 \bar{y}_i 的方差

$$s^2(\bar{y}_i) = \frac{s^2(y_{ij})}{n}$$

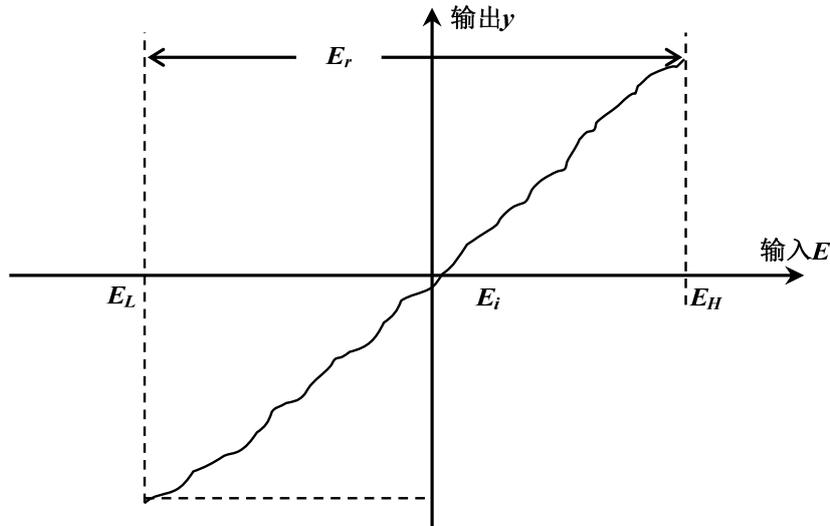


图 G.2.1 数据采集系统实际输入输出特性示意

与式(G.2.1)的理想关系相比, 实际输入值 E_i 所对应的理想输出值 $y(E_i)$ 与测量值 \bar{y}_i 间将有偏差 ε_i , 即

$$\varepsilon_i = \bar{y}_i - G_0 \cdot E_i - D_0$$

当偏差 ε_i 的平方和最小时, 即

$$\sum_{i=1}^m \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^m (\bar{y}_i - G_0 \cdot E_i - D_0)^2 = \min$$

可获得 G_0 与 D_0 的最小二乘估计值 G 和 D

$$G = \frac{m \sum_{i=1}^m \bar{y}_i E_i - \sum_{i=1}^m \bar{y}_i \sum_{k=1}^m E_k}{m \sum_{i=1}^m E_i^2 - (\sum_{i=1}^m E_i)^2} = \frac{\overline{\bar{R}_{yE}} - \bar{y} \cdot \bar{E}}{\overline{E^2} - \bar{E}^2} \quad \dots\dots\dots (G.2.4)$$

$$D = \frac{\sum_{i=1}^m \bar{y}_i \sum_{k=1}^m E_k^2 - \sum_{i=1}^m \bar{y}_i E_i \cdot \sum_{k=1}^m E_k}{m \sum_{i=1}^m E_i^2 - (\sum_{i=1}^m E_i)^2} = \frac{\bar{y} \cdot \overline{E^2} - \overline{\bar{R}_{yE}} \cdot \bar{E}}{\overline{E^2} - \bar{E}^2} \quad \dots\dots\dots (G.2.5)$$

其中

$$\overline{\bar{R}_{yE}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{y}_i E_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{y}_i; \quad \bar{E} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E_i; \quad \overline{E^2} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m E_i^2。$$

G.2.2 测量不确定度模型

由式(G.2.4)与式(G.2.5)可见，直流增益和直流偏移测量不确定度 $u(G)$ 与 $u(D)$ 的主要来源有：

a) 直流标准信号 E_i 的不确定度 $u(E_i)$ ；

b) 被校数据采集系统测量过程引入的不确定度 $u(\bar{y}_i)$ 。该分量主要包含两部分内容： E_i 的测量重复性引入的不确定度 $u_1(\bar{y}_i)$ ；被校系统分辨率（A/D 位数）引入的不确定度 $u_2(\bar{y}_i)$ 。显然，两者不相关，

$$u(\bar{y}_i) = \sqrt{u_1^2(\bar{y}_i) + u_2^2(\bar{y}_i)}$$

c) 对于以有限个固定输入点 $E_i(i=1, \dots, m)$ 估计直流增益和直流偏移来说，上述 a)、b) 描述的不确定度来源已经足够，但是，最小二乘法估计的直流增益和直流偏移是全量程范围内无限多个点的转换特性，在以有限点代替无限点来进行测量估计时，由于转换特性存在非线性误差，当输入点的个数和位置发生变化时，也将给直流增益和直流偏移的测量带来不确定因素。设由非线性因素和测量点的变化给直流增益和直流偏移带来的不确定度分别为 $u_L(G)$ 和 $u_L(D)$ 。

G.2.2.1 对于有限个固定输入点 $E_i(i=1, \dots, m)$

由式(G.2.4)得灵敏系数

$$c_G(\bar{y}_i) = \frac{\partial G}{\partial \bar{y}_i} = \frac{m \cdot E_i - \sum_{k=1}^m E_k}{m \sum_{k=1}^m E_k^2 - (\sum_{k=1}^m E_k)^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{E_i - \bar{E}}{\overline{E^2} - \bar{E}^2} \dots\dots\dots (G.2.6)$$

$$\begin{aligned} c_G(E_i) &= \frac{\partial G}{\partial E_i} = \frac{m \cdot \bar{y}_i - \sum_{k=1}^m \bar{y}_k}{m \sum_{k=1}^m E_k^2 - (\sum_{k=1}^m E_k)^2} - \frac{2G \cdot (mE_i - \sum_{k=1}^m E_k)}{m \sum_{k=1}^m E_k^2 - (\sum_{k=1}^m E_k)^2} \\ &= \frac{1}{m} \cdot \frac{\bar{y}_i - \bar{y}}{\overline{E^2} - \bar{E}^2} - \frac{2G}{m} \cdot \frac{E_i - \bar{E}}{\overline{E^2} - \bar{E}^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\bar{y}_i - \bar{y}}{\overline{E^2} - \bar{E}^2} - 2G \cdot c_G(\bar{y}_i) \dots\dots\dots (G.2.7) \end{aligned}$$

$$dG = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial G}{\partial E_i} dE_i + \frac{\partial G}{\partial \bar{y}_i} d\bar{y}_i \right) = \sum_{i=1}^m (c_G(E_i) \cdot dE_i + c_G(\bar{y}_i) \cdot d\bar{y}_i) \dots\dots\dots (G.2.8)$$

由式(G.2.5)得灵敏系数

$$c_D(\bar{y}_i) = \frac{\partial D}{\partial \bar{y}_i} = \frac{\sum_{k=1}^m E_k^2 - E_i \cdot \sum_{k=1}^m E_k}{m \sum_{k=1}^m E_k^2 - (\sum_{k=1}^m E_k)^2} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\overline{E^2} - E_i \cdot \bar{E}}{\overline{E^2} - \bar{E}^2} \dots\dots\dots (G.2.9)$$

$$\begin{aligned} c_D(E_i) &= \frac{\partial D}{\partial E_i} = \frac{2E_i \sum_{k=1}^m \bar{y}_k - \bar{y}_i \sum_{k=1}^m E_k - \sum_{k=1}^m \bar{y}_k E_k - 2D(mE_i - \sum_{k=1}^m E_k)}{m \sum_{k=1}^m E_k^2 - (\sum_{k=1}^m E_k)^2} \\ &= \frac{2E_i \cdot \bar{y} - \bar{y}_i \cdot \bar{E} - \bar{R}_{yE} - 2D(E_i - \bar{E})}{m \cdot (\overline{E^2} - \bar{E}^2)} \dots\dots\dots (G.2.10) \end{aligned}$$

$$dD = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial D}{\partial E_i} dE_i + \frac{\partial D}{\partial \bar{y}_i} d\bar{y}_i \right) = \sum_{i=1}^m (c_D(E_i) \cdot dE_i + c_D(\bar{y}_i) \cdot d\bar{y}_i) \dots\dots\dots (G.2.11)$$

根据测量值 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 对于输入 X_i 的测量值 x_i ($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$) 的不确定度传递公式：

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) u(x_i, x_j)} \quad \dots\dots\dots (G.2.12)$$

$$u(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \quad \dots\dots\dots (G.2.13)$$

式中, x_i ——为输入 X_i 的测量值; x_j ——为输入 X_j 的测量值, ($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$);

$u(x_i)$ ——为 x_i 的标准不确定度; $u(x_j)$ ——为 x_j 的标准不确定度, ($i \neq j$);

$u(x_i, x_j)$ ——为 x_i, x_j 的协方差估计值, ($i \neq j$);

$r(x_i, x_j)$ ——为 x_i, x_j 的相关系数估计值, ($i \neq j$);

本测量过程中, 对于相关系数的估计值, 当 ($i \neq j$) 时, 显然有

$r(E_i, E_j) = 0$; 不同的输入值之间不相关;

$r(\bar{y}_i, \bar{y}_j) = 0$; 不同的测量值之间可以认为是不相关;

$r(E_i, \bar{y}_i) = r(\bar{y}_i, E_i) = 1$, ($i=1, \dots, m$); 测量值与其输入值之间可以认为是完全相关;

则有, 随机误差给直流增益与直流偏移的带来的不确定度

$$u_{c1}(G) = \left\{ \sum_{i=1}^m c_G^2(E_i) u^2(E_i) + \sum_{i=1}^m c_G^2(\bar{y}_i) u^2(\bar{y}_i) + 2 \sum_{i=1}^m c_G(E_i) c_G(\bar{y}_i) u(E_i) u(\bar{y}_i) \right\}^{1/2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_G(E_i) \cdot u(E_i) + c_G(\bar{y}_i) \cdot u(\bar{y}_i))^2} \quad \dots\dots\dots (G.2.14)$$

$$u_{c1}(D) = \left\{ \sum_{i=1}^m c_D^2(E_i) u^2(E_i) + \sum_{i=1}^m c_D^2(\bar{y}_i) u^2(\bar{y}_i) + 2 \sum_{i=1}^m c_D(E_i) c_D(\bar{y}_i) u(E_i) u(\bar{y}_i) \right\}^{1/2}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_D(E_i) \cdot u(E_i) + c_D(\bar{y}_i) \cdot u(\bar{y}_i))^2} \quad \dots\dots\dots (G.2.15)$$

G.2.2.2 对于输入点发生变化时, 由于非线性误差存在, 可得由于它所带来的实验标准偏差 $s_L(G)$ 和 $s_L(D)$:

$$s_L^2 = \frac{1}{m-2} \cdot \sum_{i=1}^m [\bar{y}_i - G \cdot E_i - D]^2$$

$$s_L^2(G) = \frac{m \cdot s_L^2}{m \sum_{i=1}^m E_i^2 - (\sum_{i=1}^m E_i)^2} = \frac{s_L^2 / m}{E^2 - \bar{E}^2} \quad \dots\dots\dots (G.2.16)$$

$$s_L^2(D) = \frac{s_L^2 \cdot \sum_{i=1}^m E_i^2}{m \sum_{i=1}^m E_i^2 - (\sum_{i=1}^m E_i)^2} = \frac{\bar{E}^2 \cdot s_L^2 / m}{E^2 - \bar{E}^2} \quad \dots\dots\dots (G.2.17)$$

非线性误差和测量点变化给直流增益与直流偏移的带来的不确定度

$$u_L(G) = s_L(G) \quad \dots\dots\dots (G.2.18)$$

$$u_L(D) = s_L(D) \quad \dots\dots\dots (G.2.19)$$

其自由度 $\nu_L = m - (\text{独立变量个数}) = m - 2$ 。

G.2.2.3 直流增益与直流偏移的合成标准不确定度

由于 $u_L(G)$ 、 $u_L(D)$ 主要是由于非线性误差造成的不确定度, $u_{c1}(G)$ 、 $u_{c1}(D)$ 主要是随机误差造成的不确定度, 故可以认为, $u_L(G)$ 与 $u_{c1}(G)$ 不相关, $u_L(D)$ 与 $u_{c1}(D)$ 不相关, 则有

$$u_c(G) = \sqrt{u_{c1}^2(G) + u_L^2(G)} \quad \dots\dots\dots (G.2.20)$$

$$u_c(D) = \sqrt{u_{c1}^2(D) + u_L^2(D)} \quad \dots\dots\dots (G.2.21)$$

G.2.3 测量数据及处理

以某型数据采集系统为被校系统,其测量范围设为 $(E_L, E_H)=(-5V, 5V)$, A/D 位数为 $b=8\text{bits}$; 使用某型交直流校准器作为标准源,则校准输入值 E_i 由式(G.2.2)给出,具体如表 G.2.1 所示,各输入值 E_i 的允许误差极限 $\pm\Delta_i$ 由标准源说明书获得,则对应的被校数据采集系统测量值的平均值 \bar{y}_i 、均值方差 $s^2(\bar{y}_i)$ 和不确定度 $u(\bar{y}_i)$ 可相应获得,见表 G.2.1。

表 G.2.1 范围(-5V, 5V)内测量数据及处理结果

序号 i	E_i (V)	a_i (μV)	$u(E_i)$ (μV)	\bar{y}_i (V)	n	$s(\bar{y}_i)$ (mV)	$u(\bar{y}_i)$ (mV)
1	-4.6875	41.5	24.0	-4.58998	1000	1.55	11.4
2	-4.0625	36.5	21.1	-3.97004	1000	1.64	11.4
3	-3.4375	31.5	18.2	-3.33784	1000	1.55	11.4
4	-2.8125	26.5	15.3	-2.70728	1000	1.55	11.4
5	-2.1875	18.7	10.8	-2.09078	1000	1.52	11.4
6	-1.5625	13.7	7.91	-1.45432	1000	1.52	11.4
7	-0.9375	8.70	5.02	-0.834939	1000	1.49	11.4
8	-0.3125	3.70	2.14	-0.202492	1000	1.49	11.4
9	0.3125	3.70	2.14	0.418474	1000	1.61	11.4
10	0.9375	8.70	5.02	1.04458	1000	1.55	11.4
11	1.5625	13.7	7.91	1.67738	1000	1.61	11.4
12	2.1875	18.7	10.8	2.29848	1000	1.52	11.4
13	2.8125	26.5	15.3	2.92457	1000	1.61	11.4
14	3.4375	31.5	18.2	3.55496	1000	1.52	11.4
15	4.0625	36.5	21.1	4.18852	1000	1.52	11.4
16	4.6875	41.5	24.0	4.80928	1000	1.58	11.4

a) 直流标准信号 E_i 的不确定度,按 B 类评价方法获得。假设信号 E_i 的误差在其允许误差极限 $[-\Delta_i, +\Delta_i]$ 内服从均匀分布,则误差区间半宽度 $a_i=(\Delta_{i+}+\Delta_{i-})/2$, E_i 的不确定度 $u(E_i) = \frac{a_i}{\sqrt{3}}$, 其自由度 $\nu_{E_i}=\infty$ 。 Δ_{i+} 与 Δ_{i-} 由说明书知,如表 G.2.2 所示。

表 G.2.2 直流标准电压 E_i 的最大允许误差

量 程	分辨力	允许误差极限 $[-\Delta_i, +\Delta_i]$
220mV	10nV	$\pm 0.0009\%$ 读值 $\pm 0.8\mu\text{V}$
2.2V	100nV	$\pm 0.0008\%$ 读值 $\pm 1.2\mu\text{V}$
11V	1 μV	$\pm 0.0008\%$ 读值 $\pm 4\mu\text{V}$

b) 被校数据采集系统测量重复性引入的不确定度,按 A 类评价方法获得,在测量点 E_i 上有:

$$u_1(\bar{y}_i) = s(\bar{y}_i)$$

其自由度 $\nu_1=n-1=999$ 。

由被校数据采集系统测量范围 $(E_L, E_H)=(-5V, 5V)$, A/D 位数为 $b=8\text{bits}$, 可得量化误差为 $\text{LSB}=(E_H - E_L)/2^b = 3.90625 \times 10^{-2}\text{V}$ 。

设分辨力造成的误差在 $(-0.5 \times \text{LSB}, 0.5 \times \text{LSB})$ 内服从均匀分布,则

$$a = 0.5 \times \text{LSB} = 1.953125 \times 10^{-2}\text{V}, \quad u_2(\bar{y}_i) = \frac{a}{\sqrt{3}} = 1.127670 \times 10^{-2}\text{V}$$

其自由度 $\nu_2=\infty$ 。由 $u_1(\bar{y}_i)$ 、 $u_2(\bar{y}_i)$ 合成 $u(\bar{y}_i)$ 。

由式(G.2.16)~式 G.2.19)可计算得:

$$\begin{aligned} u_L(G) &= s_L(G) = 3.37 \times 10^{-4} \\ u_L(D) &= s_L(D) = 9.72 \times 10^{-4}\text{V} \end{aligned}$$

其自由度 $\nu_L = m-2=14$ 。

G.2.4 合成不确定度计算

由表 G.2.1 的数据, 按式(G.2.4)和式(G.2.5)可得直流增益和直流偏移的最小二乘估计值为:

$$G=1.0028; D=0.108V。$$

按式(G.2.6)、式(G.2.7)、式(G.2.9)、式(G.2.10)可得各灵敏系数如下表 G.2.3 所示。

表 G.2.3 测量数据对应的灵敏系数

序号 i	E_i (V)	\bar{y}_i (V)	$c_G(E_i)$	$c_G(\bar{y}_i)$	$c_D(E_i)$	$c_D(\bar{y}_i)$
1	-4.6875	-4.58998	3.541×10^{-2}	-3.529×10^{-2}	-6.268×10^{-2}	0.06250
2	-4.0625	-3.97004	3.064×10^{-2}	-3.059×10^{-2}	-6.268×10^{-2}	0.06250
3	-3.4375	-3.33784	2.597×10^{-2}	-2.588×10^{-2}	-6.268×10^{-2}	0.06250
4	-2.8125	-2.70728	2.127×10^{-2}	-2.118×10^{-2}	-6.268×10^{-2}	0.06250
5	-2.1875	-2.09078	1.648×10^{-2}	-1.647×10^{-2}	-6.268×10^{-2}	0.06250
6	-1.5625	-1.45432	1.183×10^{-2}	-1.176×10^{-2}	-6.268×10^{-2}	0.06250
7	-0.9375	-0.834939	7.057×10^{-3}	-7.059×10^{-3}	-6.268×10^{-2}	0.06250
8	-0.3125	-0.202492	2.381×10^{-3}	-2.353×10^{-3}	-6.268×10^{-2}	0.06250
9	0.3125	0.418474	-2.382×10^{-3}	-2.353×10^{-3}	-6.268×10^{-2}	0.06250
10	0.9375	1.04458	-7.106×10^{-3}	-7.059×10^{-3}	-6.268×10^{-2}	0.06250
11	1.5625	1.67738	-1.178×10^{-2}	-1.176×10^{-2}	-6.268×10^{-2}	0.06250
12	2.1875	2.29848	-1.654×10^{-2}	-1.647×10^{-2}	-6.268×10^{-2}	0.06250
13	2.8125	2.92457	-2.127×10^{-2}	-2.118×10^{-2}	-6.268×10^{-2}	0.06250
14	3.4375	3.55496	-2.596×10^{-2}	-2.588×10^{-2}	-6.268×10^{-2}	0.06250
15	4.0625	4.18852	-3.063×10^{-2}	-3.059×10^{-2}	-6.268×10^{-2}	0.06250
16	4.6875	4.80928	-3.539×10^{-2}	-3.529×10^{-2}	-6.268×10^{-2}	0.06250

由表 G.2.1 和表 G.2.3 所示数据, 按式(G.2.14)、式(G.2.15)分别计算出

$$u_{c1}(G) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_G(E_i) \cdot u(E_i) + c_G(\bar{y}_i) \cdot u(\bar{y}_i))^2} = 9.86 \times 10^{-4}$$

$$u_{c1}(D) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (c_D(E_i) \cdot u(E_i) + c_D(\bar{y}_i) \cdot u(\bar{y}_i))^2} = 2.84 \times 10^{-3} \text{V}$$

直流增益和直流偏移的合成标准不确定度

$$u_c(G) = \sqrt{u_{c1}^2(G) + u_L^2(G)} = 1.04 \times 10^{-3}$$

$$u_c(D) = \sqrt{u_{c1}^2(D) + u_L^2(D)} = 3.00 \times 10^{-3} \text{V}$$

G.2.5 扩展不确定度

$$\text{由 } \nu_{\text{eff}}(G) = \frac{u_c^4(G)}{\sum_i \frac{c_i^4 u_i^4}{\nu_i}} \approx 1232; \quad \nu_{\text{eff}}(D) = \frac{u_c^4(D)}{\sum_i \frac{c_i^4 u_i^4}{\nu_i}} \approx 1234$$

得有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(G)=1232$, $\nu_{\text{eff}}(D)=1234$ 。令置信概率 $P=95\%$, 查 t 分布表得包含因子 $k=t_p(\nu_{\text{eff}}) = t_{95}(1234) \approx t_{95}(1232)=1.960$, 则, 扩展不确定度:

$$U(G) = k \times u_c(G) = 1.96 \times 1.04 \times 10^{-3} = 2.0 \times 10^{-3}$$

$$U(D) = k \times u_c(D) = 1.96 \times 3.00 \times 10^{-3} \text{V} = 5.9 \times 10^{-3} \text{V}$$

G.2.6 测量结果的最终表述

最小二乘法获得的直流增益:

$$G_0 = G \pm U(G) = 1.0028 \pm 2.0 \times 10^{-3} \quad (k=1.96, P=95\%)$$

其中, \pm 后面的数据表示扩展不确定度 $U(G)$, 它的包含因子为 $k=1.96$, 该值由有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(G)=1232$, 置信概率 $P=95\%$, 通过 t 分布表查得。

最小二乘法获得的直流偏移:

$$D_0 = D \pm U(D) = (0.108 \pm 5.9 \times 10^{-3}) \text{V} \quad (k=1.96, P=95\%)$$

其中, \pm 后面的数据表示扩展不确定度 $U(D)$, 它的包含因子为 $k=1.96$, 该值由有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(D)=1234$, 置信概率 $P=95\%$, 通过 t 分布表查得。

G.3 交流增益及正弦波形幅度的不确定度评定

G.3.1 测量原理与方法

交流增益评价的基本思想, 是通过数据采集系统对一个单频正弦信号的采集数据, 运用曲线拟合的方法, 计算出该正弦信号的幅度值作为输入信号幅度测量值, 从而获取交流增益值。具体作法如下:

设: 数据采集系统通道量程为 E_r , 通道采集速率 ν ; $E \leq E_r/2$, $f_0 \leq \nu/3$, (推荐取 $f_0 = N \cdot \nu/n$); 给数据采集系统加载一个正弦波信号:

$$e(t) = E \sin(2\pi f_0 t + \varphi) \dots\dots\dots (G.3.1)$$

其中, n ——为通道采集数据个数;

N ——为通道采集的信号整周期个数; n 与 N 不能有公共因子。

启动采集, 得一组采集数据 $x_i (i=1, \dots, n)$, 按最小二乘法求出数据 $x_i (i=1, \dots, n)$ 的最佳拟合信号:

$$a(t) = A \sin(2\pi f t + \varphi) + d \dots\dots\dots (G.3.2)$$

其中, $a(t)$ ——为拟合信号的瞬时值; A ——为拟合正弦波形的幅度; f ——为拟合正弦波形的频率; φ ——为拟合正弦波形的初相位; d ——为拟合信号的直流分量值。

由于采集数据是一些离散化的值 x_i , 对应地, 其时间也是离散化的 t_i , 其中, $t_i = i/\nu$ 为第 i 个测量点的时刻, ($i=1, \dots, n$)。这样, 式(G.3.2)可改写为:

$$a(t_i) = A \sin(2\pi f t_i + \varphi) + d$$

简写为:

$$a_i = A \sin(\omega \cdot i + \varphi) + d \dots\dots\dots (G.3.3)$$

其中 $\omega = 2\pi f_0/\nu$, 则实际偏差有效值 ρ 为:

$$\rho = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - A \cdot \sin(\omega \cdot i + \varphi) - d)^2 \right)^{1/2}$$

当实际偏差有效值 ρ 最小时, 可获得式(G.3.1)的最小二乘意义下的拟合正弦信号式(G.3.3), 其中拟合信号的幅度 A 为输入信号幅度测量值。交流增益 G :

$$G = A/E \dots\dots\dots (G.3.4)$$

G.3.2 测量不确定度模型

由式(G.3.4)可见, 交流增益 G 与信号峰值 E 以及拟合幅度 A 均有关, 而采集正弦波序列的谐波失真、杂波和噪声、量化误差、抖动、序列长度、以及序列中所含信号周期个数均将给拟合幅度带来影响, 因此, 交流增益 G 测量不确定度的主要来源有:

① 信号源幅度的误差。它带来的正弦交流信号峰值 E 的不确定度 $u_1 = u(E)$;

② 采样序列的谐波失真。主要由信号的谐波失真、采集系统的非线性误差等因素造成, 它带来的幅度 A 测量不确定度 u_2 ;

③ 采样序列的噪声及非谐波失真。主要由信号的随机噪声、杂波失真, 采集系统的量化误差等因素造成, 实际也包含没有在第(2)项的谐波失真中被计入的高次谐波失真分量和微弱的较低次谐波失真分量的影响, 它带来的幅度 A 的测量不确定度 u_3 ;

④ 采样序列的抖动。主要由信号周期不稳定、以及采样间隔不稳定带来的测量序列的信号周期性变动造成, 它带来的幅度 A 的测量不确定度 u_4 ;

⑤ 四参数正弦波拟合软件误差。主要由于软件收敛判据、舍入误差、累积误差等造成, 它造成的幅度 A 测量不确定度 u_5 ;

⑥ 测量重复性带来的幅度 A 测量不确定度 u_6 。

另外，采集序列长度的变化、序列中所含信号周期个数的变化，也会给交流增益的测量带来影响，其体现在上述各项不确定度的分量中，未单独列出。

由式(G.3.4)可得：

$$dG = \frac{\partial G}{\partial A} dA + \frac{\partial G}{\partial E} dE = \frac{1}{E} dA - \frac{A}{E^2} dE \dots\dots\dots (G.3.5)$$

灵敏系数： $c(A) = \frac{\partial G}{\partial A} = \frac{1}{E}$ ； $c(E) = \frac{\partial G}{\partial E} = -\frac{A}{E^2}$

应用测量不确定度传递公式，在本测量过程中，显然可以认为：幅度 A 不同的不确定度分量之间不相关，则幅度 A 的合成标准不确定度 $u_c(A)$ ，

$$u_c(A) = \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2} \dots\dots\dots (G.3.6)$$

交流增益 G 的不确定度分量中，可以认为， $u(E)$ 与 $u(A)$ 不相关，则其合成标准不确定度 $u_c(G)$ 。

$$u_c(G) = \sqrt{c^2(E) \cdot u^2(E) + c^2(A) \cdot u_c^2(A)} = \sqrt{\frac{A^2 u_1^2}{E^4} + \frac{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2}{E^2}} \dots (G.3.7)$$

四参数正弦波拟合中，误差界的经验公式给出了估计参数依信号周期个数和谐波阶次变化而变化趋势的一个较好拟合结果。该结果中，若 ΔN 为信号周期数误差； ΔA 为信号拟合幅度误差； $\Delta\varphi$ 为信号拟合相位误差； Δd 为信号直流分量估计值误差； n 为记录数据个数($n \geq 2Nh$)； N 为记录中所含信号周期个数($\omega n T / (2\pi)$)； h 为谐波阶次，则估计参数的最大误差为：

$$\max|\Delta N| = \frac{0.90}{(Nh)^{1.2}} \cdot \frac{A_h}{A} \dots\dots\dots (G.3.8)$$

$$\max\left|\frac{\Delta A}{A}\right| = \frac{1.00}{(Nh)^{1.25}} \cdot \frac{A_h}{A} \dots\dots\dots (G.3.9)$$

$$\max|\Delta\varphi| = \frac{180^\circ}{(Nh)^{1.25}} \cdot \frac{A_h}{A} \dots\dots\dots (G.3.10)$$

$$\max\left|\frac{\Delta d}{A}\right| = \frac{0.61}{(Nh)^{1.21} \cdot h^{1.1}} \cdot \frac{A_h}{A} \dots\dots\dots (G.3.11)$$

假设由谐波 A_h 造成的幅度测量误差在其误差界内服从均匀分布，则 A_h 给 A 带来的测量不确定度 $u_A(A_h)$ 由式(G.3.9)可得： $u_A(A_h) = \frac{1.00}{(Nh)^{1.25}} \cdot \frac{A_h}{\sqrt{3}}$ ；由于三角函数基的正交性，显然，不同谐波之间互不相关，则由所有谐波给 A 带来的测量不确定度：

$$u_2 = \sqrt{\sum_{h \geq 2} u_A^2(A_h)} = \sqrt{\sum_{h \geq 2} \frac{A_h^2}{3 \cdot (Nh)^{2.5}}}$$

G.3.3 测量数据及处理

图 G.3.1 是使用某型数据采集系统测量某型信号源获得的正弦信号波形，其 A/D 位数 $b=12$ ，测量范围 $-5V \sim 5V$ ，采集速率 $v=2kSa/s$ ，采样点数 $n_0=1800$ ，信号峰值 $4.5V$ ，频率 $11Hz$ ，则序列所含周波数 $N=9$ ， $n=1634$ 。经四参数拟合，可得：

$A=4459.388mV$ ， $\omega=0.0049427578 \text{ rad.}$ ， $\varphi=219.544^\circ$ ， $d=3.985mV$ ， $\rho=37.00925mV$ ，有效位数 $6.29Bits$ 。由式(G.3.4)，可得交流增益 $G=A/E=4.459388/4.5=0.990975$

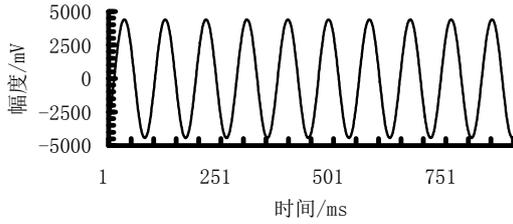


图 G.3.1 实测正弦曲线波形

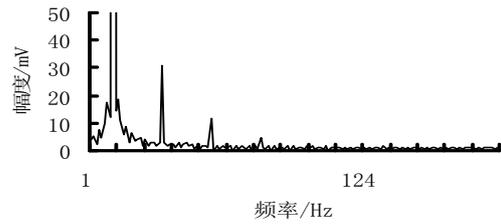


图 G.3.2 实测曲线频谱（幅频特性）

图 G.3.2 为其频谱曲线，为详细观测谐波分量起见，将幅度刻度调小，截断了基波的大部分，从该曲线可见，测量序列主要的谐波失真为 3、5、7 次谐波，故不确定度分量 u_2 中仅需计算 2~7 次谐波的影响即可，各主要谐波分量及其对拟合幅度的不确定度 $u_A(A_h)$ 如表 G.3.1。

表 G.3.1 采集序列基波与各主要谐波幅度值

波次	$A_h(\text{mV})$	φ_h°	$u_A(A_h)(\text{mV})$
基波	4459.168	219.586	
2 次谐波	3.854437	-41.100	0.06000
3 次谐波	30.67696	57.008	0.2878
4 次谐波	2.679193	-11.830	0.01754
5 次谐波	11.48631	-32.000	0.05690
6 次谐波	1.8175	27.335	0.007168
7 次谐波	4.701	64.409	0.01529

则 $u_2=0.30041\text{mV}$ ，自由度 $\nu_2=\infty$ ；从采集序列中减去上述已被 u_2 计入的谐波分量后，重新进行四参数拟合得：

$A=4459.381\text{mV}$ ， $\omega=0.004942739 \text{ rad.}$ ， $\varphi=219.550^\circ$ ， $d=3.953\text{mV}$ ， $\rho=29.479\text{mV}$ ，有效位数 6.61Bits。

在随机噪声状态下， ρ^2 为噪声方差（剔除谐波因素后的拟合方差）。正弦波最小二乘拟合四个参数的方差分别为幅度方差 S_A^2 、角频率方差 S_ω^2 、相位方差 S_φ^2 、直流分量方差 S_d^2 ，则，幅度规范化方差 S_A^2/ρ^2 、相位规范化方差 $S_\varphi^2 A^2/\rho^2$ 、直流分量规范化方差 S_d^2/ρ^2 以及角频率规范化方差 $S_\omega^2 A^2/\omega^2 \rho^2$ 的描述如图 G.3.3，在 36 个等间距信号初相位上对应的误差界，随信号周期数变化而变化情况。这里， $n_0=100$ ，各描述值均与 n 成反比。

幅度、直流分量和角频率的方差表示成比例方差的形式（如 S_A^2/A^2 、 S_d^2/A^2 和 S_ω^2/ω^2 ）更为实用。这些比例方差可以从图 G.3.3 按下述方式确定：

① 对比例方差 S_A^2/A^2 ，从图 G.3.3(a) 中找出归一化 A 方差与周期个数关系的确切位置，用相应的噪声比例方差 ρ^2/A^2 以及 $100/n$ 连乘即得；

② 对于直流分量与相应正弦幅度 A 的比例方差 S_d^2/A^2 ，从图 G.3.3(c) 中找出归一化 d 方差，再乘以 $100\rho^2/nA^2$ 可得；

③ 对于比例方差 S_ω^2/ω^2 ，在图 G.3.3(d) 中，找出相应信号周期数的比例方差，最后乘以

$100\rho^2/nA^2$ 即可获得;

④ 初相位的直接方差 S_φ^2 ，可以从图 G.3.3(b)中的 φ 方差中找到，用 $100\rho^2/nA^2$ 乘后获得。

由 $N=9$ ， $n=1634$ ， $\rho=29.479\text{mV}$ ，结合图 G.3.3(a)，可确定 $n_0=100$ 点时测量结果的幅度规范化方差 $\sigma_A^2=S_A^2/\rho^2=0.02$ ，则 $u_3=S_A=\sqrt{\frac{\sigma_A^2 \cdot n_0 \cdot \rho^2}{n}}=1.031\text{mV}$ ，其自由度 $\nu_3=n_0-4=96$ 。

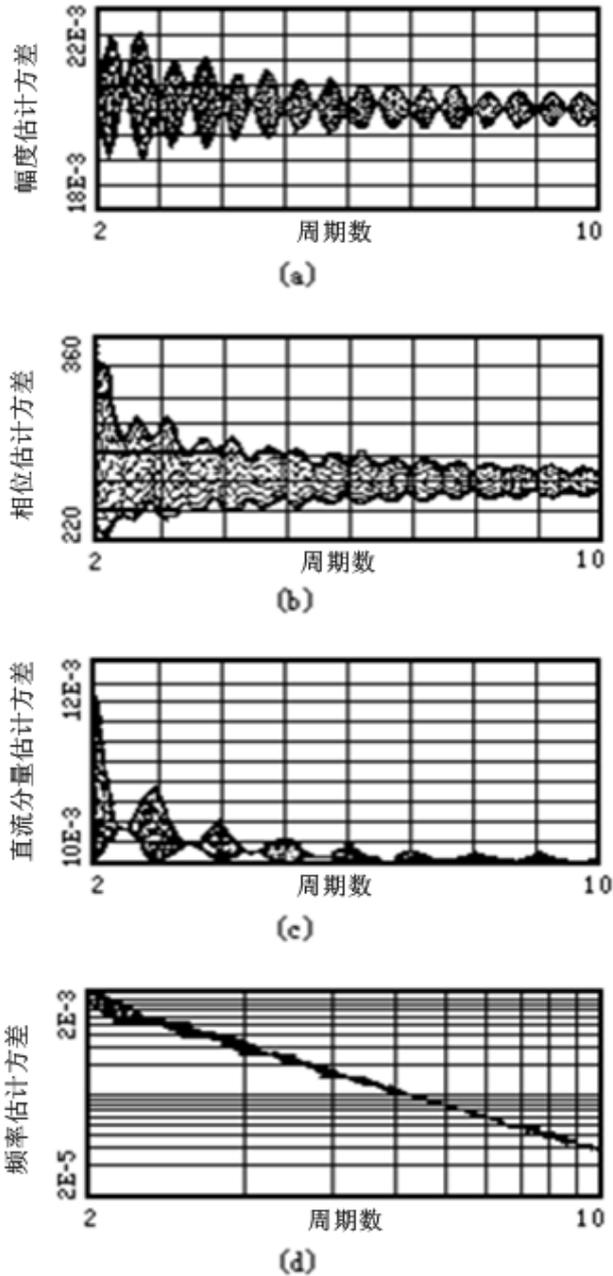


图 G.3.3 规范化参数估计方差(由噪声引起的)与周期个数的函数关系描述。

- (a) 幅度规范化方差 S_A^2/ρ^2 。
- (b) 相位规范化方差 $S_\varphi^2 A^2/\rho^2$ 。
- (c) 直流分量规范化方差 S_d^2/ρ^2 。
- (d) 角频率规范化方差 $S_\omega^2 A^2/\omega^2 \rho^2$ 。

实际情况下，始终存在的波形抖动将造成拟合幅度的抖动，并产生测量不确定度。当存在如下前提条件：

- ① 抖动的高阶导数项的影响可忽略；
- ② 任何谐波失真都足够小，以致于它对导数的影响可忽略；
- ③ 抖动误差的均值为 0，尽管这并不严格真实；
- ④ 每一采样点的抖动与其它点独立，则由抖动误差所引起的标准偏差可以估计。

图 G.3.4 为图 G.3.1 所示波形的幅度抖动测量结果曲线图。从该曲线可得幅度抖动的实验标准偏差 $s_A=0.4615\text{mV}$ ；幅度抖动最大值 $\lambda_A=1.3188\text{mV}$ 。它是由 $m_0=166$ 组值实测获得，每组 $N=9$ ， $n=1634$ 。则， $u_4=s_A=0.4615\text{mV}$ ，其自由度 $\nu_4=m_0-1=165$ 。

由信号峰值 4.5V 和信号源说明书得，正弦信号源幅度最大允许误差为：

$\pm 0.0240\%$ 读值 $\pm 400\mu\text{V}=\pm 1.48\text{mV}$ ；

设信号幅度 E 的误差在该范围内服从均匀分布，则其不确定度：

$u_1=u(E)=1.48/3^{1/2}=0.85448\text{mV}$ ，自由度 $\nu_1=\infty$ 。

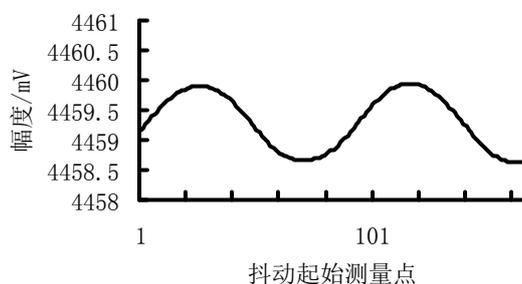


图 G.3.4 幅度抖动测量结果

数据处理软件带来的不确定度 u_5 ，由幅度已知的仿真数据，使用数据处理软件处理的结果，当 $n=n_i=1009$ 时，按 A 类不确定度评价方法获得，如表 G.3.2。

表 G.3.2 校准软件带来的幅度 E 测量不确定度 $u_{5i}(n=n_i=1009)$

$b(\text{位})$	u_{5i}	$b(\text{位})$	u_{5i}
4	$1.1 \times 10^{-2}E$	11	$1.9 \times 10^{-5}E$
5	$7.7 \times 10^{-4}E$	12	$5.8 \times 10^{-6}E$
6	$1.5 \times 10^{-3}E$	13	$5.3 \times 10^{-6}E$
7	$3.1 \times 10^{-4}E$	14	$2.5 \times 10^{-6}E$
8	$9.2 \times 10^{-5}E$	15	$1.0 \times 10^{-6}E$
9	$9.4 \times 10^{-5}E$	16	$6.8 \times 10^{-7}E$
10	$6.5 \times 10^{-5}E$	17	$2.9 \times 10^{-7}E$

由于拟合误差与序列长度成反比，A/D 位数 $b=12$ ，故有：

$u_5=u_{5i} \times n_i/n = 5.8 \times 10^{-6} \times 4.5 \times 1009/1634\text{V} = 16\mu\text{V}$ ，其自由度 $\nu_5=n_i-4=1009-4=1005$ 。

测量条件不变，重复测量 10 次，获得 10 次幅度 A 测量结果的实验标准偏差为 $s_A=0.5\text{mV}$ ，则 $u_6=s_A=0.5\text{mV}$ ，服从正态分布，其自由度 $\nu_6=10-1=9$ 。

G.3.4 合成标准不确定度计算

交流增益 G 的合成标准不确定度 $u_c(G)$ ：

$$u_c(G) = \sqrt{\frac{A^2 u_1^2}{E^4} + \frac{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2}{E^2}} = 3.4 \times 10^{-4}$$

将幅度 A 各不确定度分量列表如下表 G.3.3 所示：

表 G.3.3 幅度 A 测量不确定度分量表

不确定度分量	自由度	分布	
u_1	0.85448mV	∞	均匀
u_2	0.30041mV	∞	
u_3	1.031mV	96	
u_4	0.4615mV	165	正态
u_5	16 μ V	1005	正态
u_6	0.5mV	9	正态
$u_c(A)$			正态

从表 G.3.3 中各不确定度分量分布情况,可判定幅度合成标准不确定度近似服从正态分布。同理,增益合成标准不确定度近似服从正态分布,其有效自由度 $\nu_{eff}(G)$:

$$\nu_{eff}(G) = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^6 \frac{c_i^4 u_i^4}{\nu_i}} = \frac{u_c^4(G)}{\frac{A^4 u_1^4}{\nu_1 E^8} + \frac{1}{E^4} \cdot \left(\frac{u_2^4}{\nu_2} + \frac{u_3^4}{\nu_3} + \frac{u_4^4}{\nu_4} + \frac{u_5^4}{\nu_5} + \frac{u_6^4}{\nu_6} \right)} = 288$$

幅度 A 的合成标准不确定度 $u_c(A)$:

$$u_c(A) = \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2} = 1.3\text{mV}。$$

其有效自由度 $\nu_{eff}(A)$: $\nu_{eff}(A) = \frac{u_c^4(A)}{\sum_{i=2}^6 \frac{c_i^4 u_i^4}{\nu_i}} = 150$

G.3.5 扩展不确定度

令置信概率 $P=95\%$,由有效自由度 $\nu_{eff}(G)=288$,查 t 分布表得包含因子 $k=t_P(\nu_{eff}(G))=1.96$,则扩展不确定度:

$$U(G) = k \times u_c(G) = 1.96 \times 3.4 \times 10^{-4} = 6.7 \times 10^{-4}$$

令置信概率 $P=95\%$,由有效自由度 $\nu_{eff}(A)=150$,查 t 分布表得包含因子 $k=t_P(\nu_{eff}(A))=1.96$,则扩展不确定度:

$$U(A) = k \times u_c(A) = 1.96 \times 1.3 = 2.5 \text{ mV}$$

G.3.6 测量结果的最终表述

正弦波拟合法获得的交流增益:

$$G_0 = G \pm U(G) = 0.99098 \pm 0.00067, (k=1.96, P=95\%)$$

其中,“ \pm ”后面的数据表示扩展不确定度,其包含因子 $k=1.96$,该值由置信概率 $P=95\%$ 、有效自由度 $\nu_{eff}(G)=288$,查 t 分布表获得。

正弦波拟合法获得的正弦波幅度:

$$A_0 = A \pm U(A) = (4459.4 \pm 2.5) \text{ mV}, (k=1.96, P=95\%)$$

其中,“ \pm ”后面的数据表示扩展不确定度,其包含因子 $k=1.96$,该值由置信概率 $P=95\%$ 、有效自由度 $\nu_{eff}(A)=150$,查 t 分布表获得。

G.4 正弦拟合法直流偏移测量不确定度的评定

G.4.1 测量原理与方法

直流偏移评价的基本思想,是通过数据采集系统对正弦信号的采集数据,运用曲线拟合的方法,将拟合出的该正弦信号的直流分量值与标称值之差作为直流偏移测量值。具体过程如下:

设数据采集系统通道的量程为 E_r ,双极性对称输入方式,通道采集速率 ν ; $E \leq E_r/2$, $f_0 \leq \nu/3$, (推荐取 $f_0 = N \cdot \nu/n$); 给数据采集系统加载一个低失真正弦波信号

$$e(t) = E \cdot \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0) + d_0 \dots \dots \dots (G.4.1)$$

其中, d_0 为信号的直流偏置值, 不失一般性, 选取 $d_0=0$; n 为通道采集数据个数, N 为通道采集的信号整周期个数; n 与 N 不能有公共因子

启动采集, 得采集数据 $x_i(i=1, \dots, n)$, 按最小二乘法求出采集数据 $x_i(i=1, \dots, n)$ 的最佳拟合信号:

$$a(t)=A \cdot \sin(2\pi ft+\varphi)+d \dots\dots\dots (G.4.2)$$

其中, $a(t)$ ——为拟合信号的瞬时值; A ——为拟合正弦波幅度; f ——为拟合正弦波频率; φ ——为拟合正弦波初相位; d ——为拟合信号的直流分量值。

实际的采集数据是一些离散化的值 x_i , 对应地, 其时间也是离散化的 t_i , 其中, $t_i=i/v$ 为第 i 个测量点的时刻, ($i=1, \dots, n$); 这样, 式(G.4.2)变为

$$a(t_i)=A \cdot \sin(2\pi ft_i+\varphi)+d$$

简记为

$$a(i)=A \cdot \sin(\omega \cdot i+\varphi)+d \dots\dots\dots (G.4.3)$$

其中, $\omega=2\pi f_0/v$; 则实际偏差有效值 ρ 为

$$\rho = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - A \cdot \sin(\omega \cdot i + \varphi) - d)^2 \right)^{1/2}$$

当偏差有效值 ρ 最小时, 可得式(G.4.1)的最小二乘意义下的拟合正弦波 (G.4.3), 其拟合波形的直流分量值 d 与输入信号直流偏置值 d_0 之差为直流偏移 D

$$D=d-d_0 \dots\dots\dots (G.4.4)$$

G.4.2 测量不确定度模型

由式(G.4.4)可见, 直流偏移 D 与信号直流偏置 d_0 以及采集序列 $x_i(i=1, \dots, n)$ 均有关, 而采集正弦波序列的谐波失真、杂波和噪声、量化误差、抖动、采集序列长度, 以及采集序列中所含信号的周期个数均将给直流偏移 D 带来影响。因此, 直流偏移 D 测量不确定度的主要来源有:

- ① 正弦标准信号直流偏置 d_0 的不确定度 $u_1=u(d_0)$; 主要由信号源幅度误差造成。
- ② 采样序列的谐波失真带来的直流分量值 d 的测量不确定度 u_2 ; 它主要由信号的谐波失真、波形采集系统的非线性误差等因素造成, 可能包含 2 次、3 次等多次谐波分量的影响。
- ③ 采样序列的噪声及非谐波失真带来的直流分量值 d 的测量不确定度 u_3 ; 它主要由信号的随机噪声、杂波失真, 波形采集系统的量化误差等因素造成; 实际中, 也包含没有在第②项的谐波失真中被计入的高次谐波失真分量和微弱的较低次谐波失真分量的影响。
- ④ 采样序列的抖动带来的直流分量值 d 的测量不确定度 u_4 ; 主要由输入正弦信号周期不稳定、及波形采集系统的采样间隔抖动带来的测量序列的信号周期性变动造成。
- ⑤ 四参数正弦波拟合软件造成的直流分量值 d 的测量不确定度 u_5 。主要由于软件收敛判断、舍入误差、累积误差等造成。
- ⑥ 测量重复性带来的直流偏置 d_0 的测量不确定度 u_6 。

另外, 采集序列长度的变化、采集序列中所含信号的周期个数的变化, 也将给直流偏移的测量带来影响, 它们将体现在上述各项不确定度的分量中, 不单独列出。

由式(G.4.4)可得

$$\Delta D = \frac{\partial D}{\partial d} \Delta d + \frac{\partial D}{\partial d_0} \Delta d_0 = \Delta d - \Delta d_0 \dots\dots\dots (G.4.5)$$

灵敏系数

$$c(d) = \frac{\partial D}{\partial d} = 1; \quad c(d_0) = \frac{\partial D}{\partial d_0} = -1$$

由测量值 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 对于输入 X_i 的测量值 x_i ($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$) 的不确定度传递公式:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right) u(x_i, x_j)} \dots\dots\dots (G4.6)$$

$$u(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \dots\dots\dots (G4.7)$$

式中, x_i ——为输入 X_i 的测量值; x_j ——为输入 X_j 的测量值, ($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$);

$u(x_i)$ ——为 x_i 的标准不确定度; $u(x_j)$ ——为 x_j 的标准不确定度, ($i \neq j$);

$u(x_i, x_j)$ ——为 x_i 、 x_j 的协方差估计值, ($i \neq j$);

$r(x_i, x_j)$ ——为 x_i 、 x_j 的相关系数估计值, ($i \neq j$);

本测量过程中, 显然可以认为: 直流分量 d 不同的不确定度分量之间不相关; 则它的合成标准不确定度 $u_c(d)$,

$$u_c(d) = \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2} \dots\dots\dots (G4.8)$$

直流偏移 D 的不确定度分量中, 可以认为, $u(d_0)$ 与 $u(d)$ 不相关, 则, 其合成标准不确定度 $u_c(D)$:

$$\begin{aligned} u_c(D) &= \sqrt{c^2(d_0) \cdot u^2(d_0) + c^2(d) \cdot u^2(d)} \\ &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2} \dots\dots\dots (G4.9) \end{aligned}$$

四参数正弦波拟合中, 误差界的经验公式给出了其依信号周期个数和谐波阶次变化的一个较好拟合结果。该结果中, 若 ΔN 为信号周期数误差; ΔA 为信号拟合幅度误差; $\Delta \varphi$ 为信号拟合相位误差; Δd 为信号直流分量估计值误差; n 为记录数据个数 ($n \geq 2Nh$); N 为记录中所含信号周期个数 ($\omega n T / (2\pi)$); h 为谐波阶次 (正整数)。则, 估计参数误差的误差界如下:

$$\max |\Delta N| = \frac{0.90}{(Nh)^{1.2}} \cdot \frac{A_h}{A} \dots\dots\dots (G4.10)$$

$$\max \left| \frac{\Delta A}{A} \right| = \frac{1.00}{(Nh)^{1.25}} \cdot \frac{A_h}{A} \dots\dots\dots (G4.11)$$

$$\max |\Delta \varphi| = \frac{180^\circ}{(Nh)^{1.25}} \cdot \frac{A_h}{A} \dots\dots\dots (G4.12)$$

$$\max \left| \frac{\Delta d}{A} \right| = \frac{0.61}{(Nh)^{1.21} \cdot h^{1.1}} \cdot \frac{A_h}{A} \dots\dots\dots (G4.13)$$

假设由谐波 A_h 造成的直流分量 d 测量误差在其误差界内服从均匀分布, 则 A_h 给 d 带来的测量不确定度 $u_d(A_h)$ 由式(G4.13)可得

$$u_d(A_h) = \frac{0.61}{(Nh)^{1.21} h^{1.1}} \cdot \frac{A_h}{\sqrt{3}};$$

由于三角函数基的正交性, 显然, 不同谐波之间互不相关, 则所有谐波引起的 A 的测量不确定度

$$u_2 = \sqrt{\sum_{h \geq 2} u_d^2(A_h)} = \sqrt{\sum_{h \geq 2} \frac{0.124 A_h^2}{(Nh)^{2.42} h^{2.2}}}$$

G.4.3 测量数据及处理

图 G4.1 是使用某型数据采集系统, 对于某型信号源进行测量获得的正弦信号波形; 其 A/D 位数 $BD=12$ bits, 测量范围 $-5V \sim 5V$, 采集速率 $v=2$ kSa/s, 采样点数 $n_0=1800$; 信号峰值 $4.5V$, 频率 11 Hz。则序列所含周波数 $N=9$, $n=1634$, 经过四参数拟合得:

$A=4459.388$ mV; $\omega=0.0049427578$ 弧度; $\varphi=219.544^\circ$; $d=3.985$ mV; $\rho=37.00925$ mV; 有效位数 6.29 Bits。

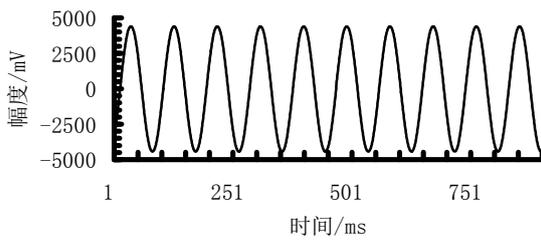


图 G.4.1 实测正弦曲线波形

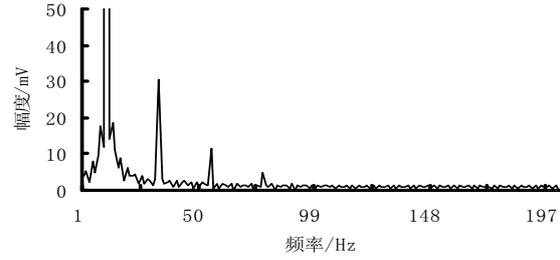


图 G.4.2 实测曲线频谱

图 G.4.2 为其频谱曲线图,为详细观测谐波分量起见,将幅度刻度调小,截断了基波的大部分,从该曲线可见,该测量序列主要的谐波失真为 3、5、7 次谐波,其它谐波分量与噪声没有什么区别,故不确定度分量 u_2 中仅需计算 2~7 次谐波的影响即可,各主要谐波分量及其给拟合直流分量 d 造成的不确定度 $u_d(A_h)$ 如表 G.4.1 所示。

表 G.4.1 采集序列基波与各主要谐波幅度值

波次	$A_h(\text{mV})$	φ_h°	$u_d(A_h)(\text{mV})$
基波	4459.168	219.586	
2 次谐波	3.854437	-41.100	0.019
3 次谐波	30.67696	57.008	0.060
4 次谐波	2.679193	-11.830	0.0027
5 次谐波	11.48631	-32.000	0.0069
6 次谐波	1.8175	27.335	0.00071
7 次谐波	4.701	64.409	0.0013

则, $u_2=0.00400\text{mV}$, 自由度 $\nu_2=\infty$; 从采集序列中减去上述已经被 u_2 计入的谐波分量后,重新进行四参数拟合得:

$A=4459.381\text{mV}$; $\omega=0.004942739$ 弧度; $\varphi=219.550^\circ$; $d=3.953\text{mV}$; $\rho=29.479\text{mV}$; 有效位数 6.61Bits。

在随机噪声状态下, ρ^2 为噪声方差(剔除谐波因素后的拟合方差)。正弦波最小二乘拟合四个参数的方差分别为幅度方差 S_A^2 、角频率方差 S_ω^2 、相位方差 S_φ^2 、直流分量方差 S_d^2 , 则, 幅度规范化方差 S_A^2/ρ^2 、相位规范化方差 $S_\varphi^2 A^2/\rho^2$ 、直流分量规范化方差 S_d^2/ρ^2 以及角频率规范化方差 $S_\omega^2 A^2/\omega^2 \rho^2$ 的描述如图 G.4.3, 在 36 个等间距信号初相位上对应的误差界, 随信号周期数变化而变化情况。这里, $n_0=100$, 各描述值均与 n 成反比。

幅度、直流分量和频率的方差表示成比例方差的形式(如 S_A^2/A^2 、 S_d^2/A^2 和 S_ω^2/ω^2) 通常更为实用。这些比例方差可以从图 G.4.3 按下述方式确定:

①、对比例方差 S_A^2/A^2 , 从图 G.4.3(a) 中找出归一化 A 方差与周期个数关系的确切位置, 用相应的噪声比例方差 ρ^2/A^2 以及 $100/n$ 连乘即得;

②、对于直流分量与相应正弦幅度 A 的比例方差 S_d^2/A^2 , 从图 G.4.3(c) 中找出归一化 d 方差, 再乘以 $100\rho^2/nA^2$ 可得;

③、对于比例方差 S_{ω}^2/ω^2 ，在图 G.4.3(d)中，找出相应信号周期数的比例方差，最后乘以 $100\rho^2/nA^2$ 即可得；

④、初相位的直接方差 S_{ϕ}^2 ，可以从图 G.4.3(b)中的 ϕ 方差中找到，用 $100\rho^2/nA^2$ 乘后获得。

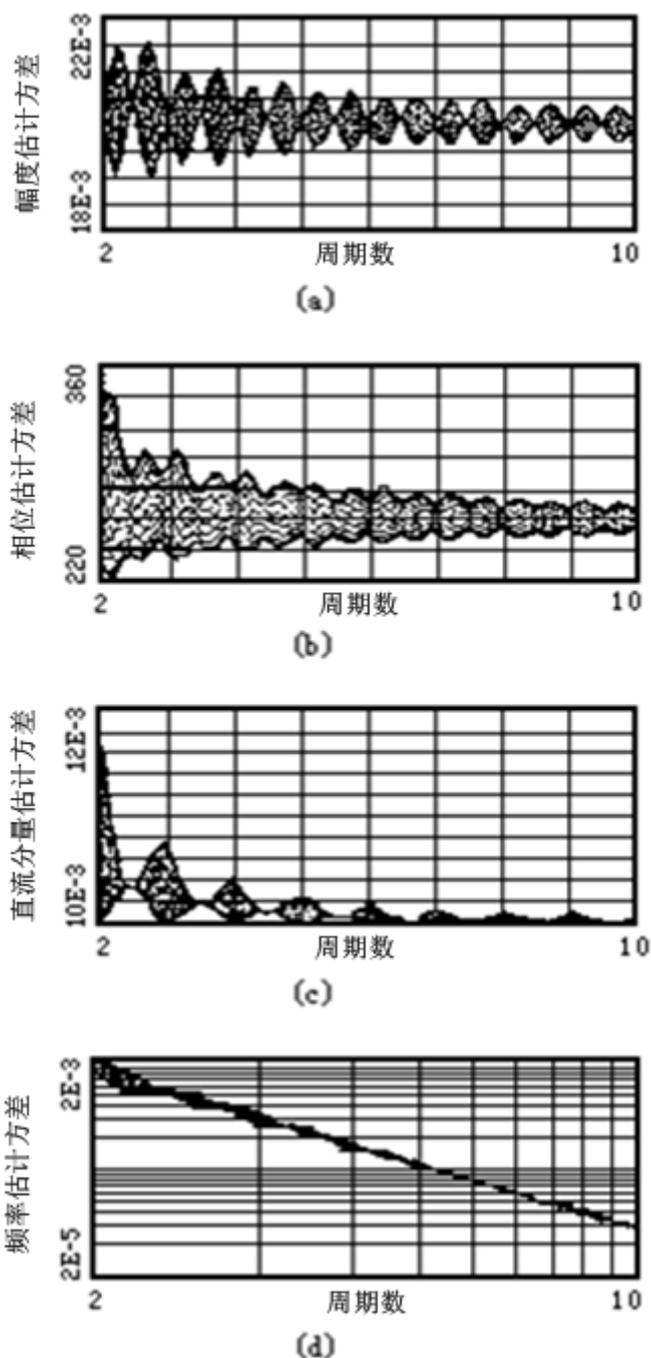


图 G.4.3 规范化参数估计方差(由噪声引起的)与周期个数的函数关系描述.

- (a) 幅度规范化方差 S_A^2/ρ^2 .
- (b) 相位规范化方差 $S_{\phi}^2 A^2/\rho^2$.
- (c) 直流分量规范化方差 S_d^2/ρ^2 .
- (d) 角频率规范化方差 $S_{\omega}^2 A^2/\omega^2 \rho^2$.

由 $N=9$, $n=1634$, $\rho=29.479\text{mV}$, 则从图 G.4.3(c)可确定, $n_0=100$ 点时直流分量 d 的规范化方差 $\sigma_d^2=S_d^2/\rho^2=0.0101$, 则:

$$u_3 = S_d = \sqrt{\frac{\sigma_d^2 \cdot n_0 \cdot \rho^2}{n}} = 0.731\text{mV}$$

其自由度 $\nu_3=n_0-4=96$

实际情况下, 始终存在的波形抖动将造成拟合直流偏移的抖动并产生不确定度。当存在如下几个前提条件时:

- ①、抖动的高阶导数项的影响可忽略;
- ②、任何谐波失真都足够小, 以致于它对导数的影响可忽略;
- ③、抖动误差的均值为 0, 尽管这并不严格真实;
- ④、每一采样点的抖动与其它点独立。则由抖动误差所引起的标准偏差可以估计。

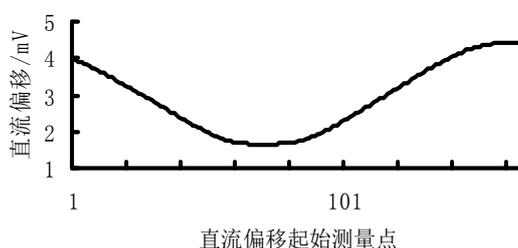


图 G.4.4 直流偏移抖动测量结果

图 G.4.4 为图 G.4.1 所示波形的直流偏移抖动测量结果曲线图。从该曲线图可得直流偏移的均值 $\bar{d} = 2.895\text{mV}$, 直流偏移抖动的实验标准偏差 $s_d = 0.9417\text{mV}$; 直流偏移抖动最大值 $\lambda_d = 2.764\text{mV}$ 。它是由 $m_0=166$ 组值实测获得, 每组 $N=9$, $n=1634$ 。则, $u_4=s_d=0.942\text{mV}$; 其自由度 $\nu_4=m_0-1=165$ 。

由式(G.4.4)得直流偏移为

$$D = \bar{d} - d_0 = 2.895\text{mV}$$

由信号峰值 4.5V、频率 11Hz 和说明书可得, 正弦标准信号源幅度最大允许误差为: $\pm 0.0240\%$ 读值 $\pm 400\mu\text{V} = \pm 1.48\text{mV}$;

直流偏置 d_0 的最大允许误差则是其幅度为 0 时的量值, 即 $\pm 0.400\text{mV}$; 设直流偏置 d_0 的误差在该范围内服从均匀分布, 则其不确定度:

$u_1 = u(d_0) = 0.4/3^{1/2} = 0.231\text{mV}$, 其自由度 $\nu_1 = \infty$ 。

对于数据处理软件带来的不确定度 u_5 , 由幅度已知的仿真数据用数据处理软件计算的结果, 当 $n_0 = 1009$ 时, 按 A 类不确定度评价方法获得, 如表 G.4.2。

表 G.4.2 校准软件带来的直流分量 d 的测量不确定度 $u_{5i}(n=1009, \text{幅度 } E)$

BD(位)	u_{5i}	BD(位)	u_{5i}
4	$3.2 \times 10^{-3}E$	11	$1.8 \times 10^{-7}E$
5	$1.4 \times 10^{-5}E$	12	$1.5 \times 10^{-7}E$
6	$7.7 \times 10^{-6}E$	13	$4.9 \times 10^{-8}E$
7	$2.9 \times 10^{-6}E$	14	$5.3 \times 10^{-8}E$
8	$1.1 \times 10^{-6}E$	15	$4.6 \times 10^{-8}E$
9	$5.6 \times 10^{-7}E$	16	$5.0 \times 10^{-9}E$
10	$2.8 \times 10^{-7}E$	17	$1.7 \times 10^{-8}E$

由于拟合误差与序列长度成反比，A/D 位数 $BD=12\text{bits}$ ，故有：

$$u_5 = u_{5i} \times n_0 / n = 1.5 \times 10^{-7} \times 4.5 \times 1009 / 1634 \text{V} = 0.417 \mu\text{V}，其自由度 \nu_5 = n_0 - 4 = 1009 - 4 = 1005。$$

测量条件不变，重复测量 10 次，获得 10 次直流偏移 d 测量结果的实验标准偏差为 $s_d = 0.95 \text{mV}$ ，则 $u_6 = s_d = 0.95 \text{mV}$ ，服从正态分布，其自由度 $\nu_6 = 10 - 1 = 9$ 。

G.4.4 合成不确定度计算

将直流偏移 D 各不确定度分量列表如表 G.4.3 所示：

表 G.4.3 直流偏移 D 测量不确定度分量表

不确定度分量		自由度	分布
u_1	0.231mV	∞	均匀
u_2	4 μV	∞	
u_3	0.731mV	96	
u_4	0.942mV	165	正态
u_5	0.417 μV	1005	正态
u_6	0.95mV	9	正态
$u_c(D)$			正态

从表 G.4.3 中各不确定度分量分布情况，没有绝对占优势的分量，可判定直流偏移 D 合成标准不确定度近似服从正态分布，同理，直流分量 d 合成标准不确定度近似服从正态分布。

直流分量 d 的合成标准不确定度 $u_c(d)$

$$u_c(d) = \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2} = 1.52 \text{ mV}。$$

其有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(d)$

$$\nu_{\text{eff}}(d) = \frac{u_c^4(d)}{\sum_{i=2}^6 \frac{c_i^4 u_i^4}{\nu_i}} = \frac{u_c^4(d)}{\frac{u_2^4}{\nu_2} + \frac{u_3^4}{\nu_3} + \frac{u_4^4}{\nu_4} + \frac{u_5^4}{\nu_5} + \frac{u_6^4}{\nu_6}} = 54.9$$

直流偏移 D 的合成标准不确定度 $u_c(D)$

$$u_c(D) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2} = 2.38 \text{ mV}。$$

其有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(D)$

$$\nu_{\text{eff}}(D) = \frac{u_c^4(D)}{\sum_{i=1}^6 \frac{c_i^4 u_i^4}{\nu_i}} = \frac{u_c^4(D)}{\frac{u_1^4}{\nu_1} + \frac{u_2^4}{\nu_2} + \frac{u_3^4}{\nu_3} + \frac{u_4^4}{\nu_4} + \frac{u_5^4}{\nu_5} + \frac{u_6^4}{\nu_6}} = 324.4$$

G.4.5 扩展不确定度

令置信概率 $P=95\%$ ，由有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(D)=324$ ，查 t 分布表得包含因子 $k_P = t_P(\nu_{\text{eff}}) = 1.96$ ，则直流偏移 D 的扩展不确定度

$$U(D) = k_P \times u_c(D) = 1.96 \times 2.38 \text{ mV} = 4.7 \text{ mV}$$

令置信概率 $P=95\%$ ，由有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(d)=55$ ，查 t 分布表得包含因子 $k_P = t_P(\nu_{\text{eff}}) = 2.01$ ，则直流分量 d 的扩展不确定度

$$U(d) = k_P \times u_c(d) = 2.01 \times 1.52 \text{ mV} = 3.1 \text{ mV}$$

G.4.6 测量结果的最终表述

正弦波拟合法获得的直流偏移

$$D_0 = D \pm U(D) = (2.9 \pm 4.7) \text{ mV} (k=1.96, P=95\%)$$

其中，“ \pm ”后面是扩展不确定度，其包含因子 $k=1.96$ ，由置信概率 $P=95\%$ 、有效自由度 $\nu_{\text{eff}}=324$ ，查 t 分布表获得。

正弦波拟合法获得的直流分量

$$d_0 = d \pm U(d) = (2.9 \pm 3.1) \text{mV} \quad (k=2.01, P=95\%)$$

其中，“±”后面是扩展不确定度，其包含因子 $k=2.01$ ，由置信概率 $P=95\%$ 、有效自由度 $\nu_{\text{eff}}=55$ ，查 t 分布表获得。

G.5 正弦拟合法采集速率的测量不确定度评定

G.5.1 测量原理与方法

设数据采集系统通道的量程为 E_r ，双极性对称输入方式，通道采集速率 ν ； $E \leq E_r/2$ ，输入信号的频率 $f_0 \leq \nu/3$ ，(推荐取 $f_0 = N \cdot \nu/n$)；给数据采集系统加载一个低失真正弦波信号：

$$e(t) = E \cdot \sin(2\pi f_0 t + \varphi) + d_0 \dots \dots \dots (G.5.1)$$

其中， d_0 ——为信号的直流偏置值，不失一般性，选取 $d_0=0$ ； n ——为通道采集数据个数， N ——为通道采集的信号整周期个数； n 与 N 不能有公共因子

启动采集，获得采集数据 $x_i (i=1, \dots, n)$ ，按最小二乘法求出采集数据 $x_i (i=1, \dots, n)$ 的最佳拟合信号：

$$a(t) = A \cdot \sin(2\pi f t + \varphi) + d \dots \dots \dots (G.5.2)$$

其中， $a(t)$ ——为拟合信号的瞬时值； A ——为拟合正弦波形的幅度； f ——为拟合正弦波形的频率； φ ——为拟合正弦波形的初相位； d ——为拟合信号的直流分量值。

实际的采集数据是一些离散化的值 x_i ，对应地，其时间也是离散化的 t_i ，其中， $t_i = i/\nu$ 为第 i 个测量点的时刻，($i=1, \dots, n$)；这样，式(G.5.2)变成了：

$$a(t_i) = A \cdot \sin(2\pi f t_i + \varphi) + d$$

简记为：

$$a(i) = A \cdot \sin(\omega \cdot i + \varphi) + d \dots \dots \dots (G.5.3)$$

其中 $\omega = 2\pi f_0/\nu$ ；则，实际偏差有效值 ρ 为：

$$\rho = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - A \cdot \sin(\omega \cdot i + \varphi) - d)^2 \right)^{1/2}$$

当实际偏差有效值 ρ 最小时，可获得式(G.5.1)的最小二乘意义下的拟合正弦波信号，如式(G.5.3)所示。拟合信号的离散角频率值 ω ，则通道采集速率值 ν 为：

$$\nu = 2\pi f_0/\omega \dots \dots \dots (G.5.4)$$

G.5.2 测量不确定度模型

由式(G.5.4)可知，采集速率 ν 与信号频率 f_0 以及采集序列 $x_i (i=1, \dots, n)$ 的离散角频率 ω 均有关，而采集正弦波序列的谐波失真、杂波和噪声、量化误差、抖动、序列长度，以及序列中所含信号周期个数均将给采集速率 ν 带来影响。因此，采集速率 ν 测量不确定度的主要来源有：

- ① 正弦交流标准信号频率 f_0 的不确定度 $u_1 = u(f_0)$ ；它主要由信号源频率的误差造成。
- ② 采样序列的谐波失真带来的离散角频率 ω 的测量不确定度 u_2 ；它主要由信号的谐波失真、波形采集系统的非线性误差等因素造成，可能包含 2 次、3 次等多次谐波分量的影响。
- ③ 采样序列的噪声及非谐波失真带来的离散角频率 ω 的测量不确定度 u_3 ；它主要由信号的随机噪声、杂波失真，波形采集系统的量化误差等因素造成；实际情况下，还需考虑没有计入在第②项谐波失真中的高次谐波失真分量和微弱的较低次谐波失真分量的影响。
- ④ 采样序列抖动带来的离散角频率 ω 的测量不确定度 u_4 ；主要由输入正弦信号周期不稳定以及波形采集系统的采样间隔不稳定带来的测量序列的信号周期性变动造成。
- ⑤ 四参数正弦波拟合软件造成的离散角频率 ω 的测量不确定度 u_5 ；主要由于软件收敛判据、舍入误差、累积误差等造成。
- ⑥ 测量重复性带来的不确定度 u_6 。

另外，采集序列长度的变化、采集序列中所含信号的周期个数的变化，也将给采集速率的

测量带来影响，它们将体现在上述各项不确定度的分量中，不单独列出。

由式(G.5.4)可得：

$$dv = \frac{\partial v}{\partial f_0} df_0 + \frac{\partial v}{\partial \omega} d\omega = \frac{2\pi}{\omega} df_0 - \frac{2\pi f_0}{\omega^2} d\omega \dots\dots\dots (G.5.5)$$

灵敏系数：

$$c(\omega) = \frac{\partial v}{\partial \omega} = -\frac{2\pi f_0}{\omega^2}; \quad c(f_0) = \frac{\partial v}{\partial f_0} = \frac{2\pi}{\omega}$$

由于测量值 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 对于输入 X_i 的测量值 x_i ($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$) 的不确定度传递公式为：

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right) u(x_i, x_j)} \dots\dots\dots (G.5.6)$$

$$u(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \dots\dots\dots (G.5.7)$$

式中， x_i ——为输入 X_i 的测量值； x_j 为输入 X_j 的测量值，($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$)；

$u(x_i)$ ——为 x_i 的标准不确定度； $u(x_j)$ 为 x_j 的标准不确定度，($i \neq j$)；

$u(x_i, x_j)$ ——为 x_i 、 x_j 的协方差估计值，($i \neq j$)；

$r(x_i, x_j)$ ——为 x_i 、 x_j 的相关系数估计值，($i \neq j$)；

本测量过程中，显然可以认为：离散角频率不同的不确定度分量之间不相关，则它的合成标准不确定度 $u_c(\omega)$ ：

$$u_c(\omega) = \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2} \dots\dots\dots (G.5.8)$$

采集速率 v 的不确定度分量中，可认为 $u(f_0)$ 与 $u_c(\omega)$ 不相关，则其合成标准不确定度 $u_c(v)$ ：

$$\begin{aligned} u_c(v) &= \sqrt{c^2(f_0)u^2(f_0) + c^2(\omega)u_c^2(\omega) + u_6^2} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\omega^2}u_1^2 + \frac{v^2}{\omega^2}u_c^2(\omega) + u_6^2} \\ &= \sqrt{\frac{4\pi^2 u_1^2 + v^2(u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2)}{\omega^2} + u_6^2} \dots\dots\dots (G.5.9) \end{aligned}$$

在四参数正弦波拟合中，误差界的经验公式给出了其依信号周期个数和谐波阶次变化而变化趋势的一个较好拟合结果。该结果中，若 ΔN 为信号周期数误差、 ΔA 为信号拟合幅度误差、 $\Delta \phi$ 为信号拟合相位误差、 Δd 为信号直流分量估计值误差、 n 为记录数据个数($n \geq 2Nh$)、 N 为记录中所含信号周期个数($\omega n T / (2\pi)$)、 h 为谐波阶次，则估计参数误差的误差界为：

$$\max|\Delta N| = \frac{0.90}{(Nh)^{1.2}} \cdot \frac{A_h}{A} \dots\dots\dots (G.5.10)$$

$$\max\left| \frac{\Delta A}{A} \right| = \frac{1.00}{(Nh)^{1.25}} \cdot \frac{A_h}{A} \dots\dots\dots (G.5.11)$$

$$\max|\Delta \phi| = \frac{180^\circ}{(Nh)^{1.25}} \cdot \frac{A_h}{A} \dots\dots\dots (G.5.12)$$

$$\max\left| \frac{\Delta d}{A} \right| = \frac{0.61}{(Nh)^{1.21} \cdot h^{1.1}} \cdot \frac{A_h}{A} \dots\dots\dots (G.5.13)$$

显然， $\omega = \frac{2\pi N}{n}$ ；

$$\Delta \omega = \frac{2\pi}{n} \Delta N \dots\dots\dots (G.5.14)$$

假设由谐波 A_h 造成的 ω 的测量误差在其误差范围内服从均匀分布, 则 A_h 给 ω 带来的测量不确定度 $u_{\omega}(A_h)$ 由式 (G.5.10) 和式 (G.5.14) 可得:

$$u_{\omega}(A_h) = \frac{\Delta\omega}{\sqrt{3}} = \frac{1.8\pi}{(Nh)^{1.2} \cdot n} \cdot \frac{A_h}{A\sqrt{3}}$$

由于三角函数基的正交性, 显然不同谐波之间互不相关, 则由所有谐波引起的 ω 的测量不确定度:

$$u_2 = \sqrt{\sum_{h \geq 2} u_{\omega}^2(A_h)} = \sqrt{\sum_{h \geq 2} \frac{10.659 A_h^2}{(Nh)^{2.4} \cdot n^2 A^2}}$$

G.5.3 测量数据及处理

图 G.5.1 是使用某型数据采集系统, 对于某型信号源进行测量获得的正弦信号波形; 其 A/D 位数 $BD=12$ bits, 测量范围 $-5V \sim 5V$, 采集速率 $v=2kSa/s$, 采样点数 $n_0=1800$; 信号峰值 $4.5V$, 频率 $11Hz$ 。则序列所含周波数 $N=9$, $n=1634$, 经过四参数拟合得:

$A=4459.1683mV$; $\omega=0.003459784$ 弧度; $\varphi=-138.431^\circ$; $d=3.98505mV$; $\rho=37.00925mV$; 有效位数 6.29 Bits (它是 ρ 相对于采集量程以 A/D 有效量化位数表述的对应量值, 下同)。

图 G.5.2 为其频谱曲线图, 为详细观测谐波分量起见, 将幅度刻度调小, 截断了基波的大部分, 从该曲线可见, 该测量序列主要的谐波失真为 3、5、7 次谐波, 其它谐波分量与噪声没有什么区别, 故不确定度分量 u_2 中仅需计算 2~7 次谐波的影响即可, 各主要谐波分量及其给拟合离散角频率 ω 造成的不确定度 $u_{\omega}(A_h)$ 如表 G.5.1。

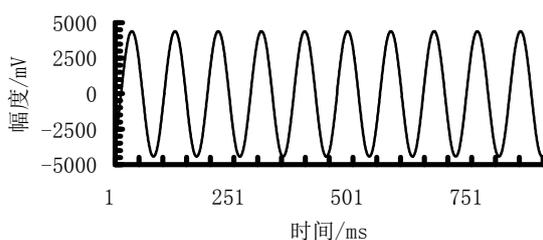


图 G.5.1 实测正弦曲线波形

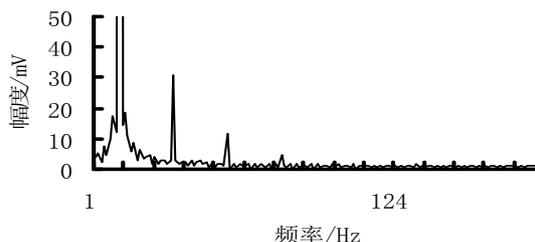


图 G.5.2 实测曲线频谱

表 G.5.1 采集序列基波与各主要谐波幅度值

波次	$A_h(mV)$	φ_h°	$u_{\omega}(A_h)(rad)$
基波	4459.168	-138.431	
2次谐波	3.854437	-41.100	5.3816×10^{-8}
3次谐波	30.67696	57.008	2.6330×10^{-7}
4次谐波	2.679193	-11.830	1.6282×10^{-8}
5次谐波	11.48631	-32.000	5.4328×10^{-8}
6次谐波	1.8175	27.335	6.7901×10^{-9}
7次谐波	4.701	64.409	1.4597×10^{-8}

则, $u_2=2.75 \times 10^{-7} rad$, 服从正态分布, 自由度 $\nu_2=\infty$; 从采集序列中减去上述已经被 u_2 计入的谐波分量后, 重新进行四参数拟合得:

$A=4459.214mV$; $\omega=0.003459782$ 弧度; $\varphi=-136.448^\circ$; $d=3.9533mV$; $\rho=29.479mV$; 有效位数 6.61 Bits。

在随机噪声状态下, ρ^2 为噪声方差 (剔除谐波因素后的拟合方差)。正弦波最小二乘拟合四个参数的方差分别为幅度方差 S_A^2 、角频率方差 S_ω^2 、相位方差 S_φ^2 、直流分量方差 S_d^2 , 则,

幅度规范化方差 S_A^2/ρ^2 、相位规范化方差 $S_\varphi^2 A^2/\rho^2$ 、直流分量规范化方差 S_d^2/ρ^2 以及角频率规

范化方差 $S_{\omega}^2 A^2 / \omega^2 \rho^2$ 的描述如图 G.5.3, 在 36 个等间距信号初相位上对应的误差范围, 随信号周期数变化而变化情况。这里, $n_0=100$, 各描述值均与 n 成反比。

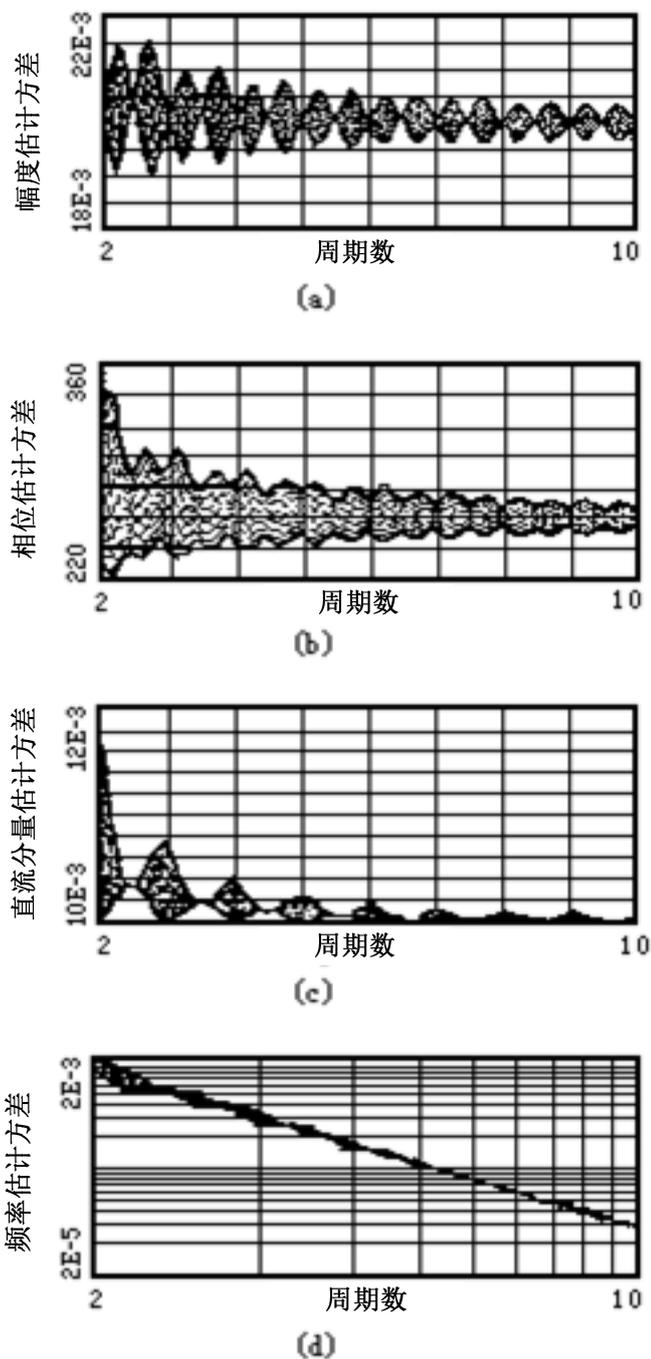


图 G.5.3 规范化参数估计方差(由噪声引起的)与周期个数的函数关系描述。

- (a) 幅度规范化方差 S_A^2 / ρ^2 .
- (b) 相位规范化方差 $S_{\phi}^2 A^2 / \rho^2$.
- (c) 直流分量规范化方差 S_d^2 / ρ^2 .
- (d) 角频率规范化方差 $S_{\omega}^2 A^2 / \omega^2 \rho^2$.

信号的幅度、直流分量和角频率的方差表示成比例方差的形式，例如 S_A^2/A^2 、 S_d^2/A^2 和 S_ω^2/ω^2 ，通常更为实用。这些比例方差可结合图 G.5.3，按下述方式确定：

- ① 对于比例方差 S_A^2/A^2 ，从图 G.5.3(a)中找出归一化 A 方差与周期个数关系的确切位置，再与相应的噪声比例方差 ρ^2/A^2 和 $100/n$ 相乘可得；
- ② 对于直流分量与相应正弦幅度 A 的比例方差 S_d^2/A^2 ，从图 G.5.3(c)中找出归一化 d 方差，再与 $100\rho^2/nA^2$ 相乘可得；
- ③ 对于比例方差 S_ω^2/ω^2 ，在图 G.5.3(d)中，找出相应信号周期数的比例方差，再与 $100\rho^2/nA^2$ 相乘可得；
- ④ 对于初相位的直接方差 S_ϕ^2 ，可从图 G.5.3(b)中的 ϕ 方差中找到，再与 $100\rho^2/nA^2$ 相乘可得。

由 $N=9$ ， $n=1634$ ， $\rho=29.479\text{mV}$ ；从图 G.5.3(d)中查得： $n_0=100$ 点时离散角频率 ω 的规范化方差 $\sigma_\omega^2=S_\omega^2/\rho^2=2.2\times 10^{-5}$ ，则本节中：

$$u_3 = S_\omega = \sqrt{\frac{\sigma_\omega^2 \cdot \omega^2 \rho^2 \cdot n_0}{A^2 n}} = 3.79 \times 10^{-8} \text{rad}$$

服从均匀分布，其自由度 $\nu_3=n_0-4=96$ 。

在实际情况下，始终存在波形抖动，它将造成拟合离散角频率的抖动，并产生采集速率不确定度。当存在如下几个前提条件时：①抖动的高阶导数项的影响可忽略；②任何谐波失真都足够小，以致于它对导数的影响可忽略；③抖动误差的均值为 0，尽管这并不严格真实；④每一采样点的抖动与其它点独立，则由抖动误差所引起的标准偏差可以估计。

图 G.5.4 为图 G.5.1 曲线波形的离散角频率 ω 的抖动测量结果曲线图。

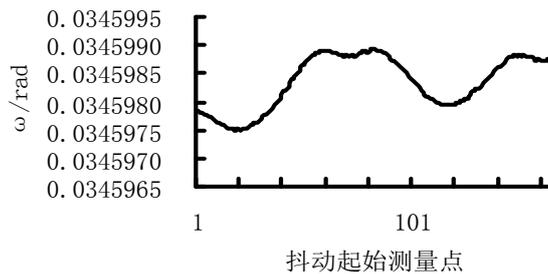


图 G.5.4 离散角频率 ω 抖动测量结果

从该曲线图 G.5.4 可得离散角频率 ω 的均值 $\bar{\omega}=0.034598341 \text{ rad}$ ，离散角频率 ω 抖动的实验标准偏差： $s_\omega=4.73\times 10^{-7} \text{ rad}$ ；离散角频率 ω 抖动的最大值： $\lambda_\omega=1.42\times 10^{-6} \text{ rad}$ 。它是由 $m_0=166$ 组值实测获得，每组 $N=9$ ， $n=1634$ 。则 $u_4=s_\omega=4.73\times 10^{-7} \text{ rad}$ ，服从均匀分布，其自由度 $\nu_4=m_0-1=165$ 。则，由式 (G.5.4) 得采集速率为

$$\nu = 2\pi f_0/\omega = 1997.6402 \text{ Sa/s}$$

测量条件不变，重复测量 10 次，则测量结果的实验标准偏差为 $s_\nu = 0.146 \text{ Sa/s}$ ， $u_6=s_\nu = 0.146 \text{ Sa/s}$ ，服从正态分布，其自由度 $\nu_6=10-1=9$ 。

由信号频率 11Hz 和说明书得，正弦信号源频率最大允许误差为：
 $\pm 0.01\% \times \text{读值} = \pm 0.0011\text{Hz}$ 。

设信号频率 f_0 的误差在该范围内服从均匀分布，则其不确定度：

$$u_1 = u(f_0) = 0.0011/3^{1/2} = 6.35 \times 10^{-4}\text{Hz}, \text{ 其自由度 } \nu_1 = \infty。$$

对于数据处理软件带来的不确定度 u_5 和由参数已知的仿真数据用数据处理软件计算的结果，当 $n_0 = 1009$ 时，按 A 类不确定度评价方法获得，如表 G.5.2。

表 G.5.2 校准软件带来的离散角频率 ω 的测量不确定度 $u_{5i}(n=1009)$

BD(位)	u_{5i}	BD(位)	u_{5i}
4	$4.6 \times 10^{-5} \omega$	11	$5.0 \times 10^{-7} \omega$
5	$4.2 \times 10^{-5} \omega$	12	$2.7 \times 10^{-7} \omega$
6	$2.5 \times 10^{-5} \omega$	13	$1.4 \times 10^{-7} \omega$
7	$8.6 \times 10^{-6} \omega$	14	$5.6 \times 10^{-8} \omega$
8	$3.3 \times 10^{-6} \omega$	15	$2.5 \times 10^{-8} \omega$
9	$1.5 \times 10^{-6} \omega$	16	$1.5 \times 10^{-8} \omega$
10	$7.8 \times 10^{-7} \omega$	17	$8.1 \times 10^{-9} \omega$

由于拟合误差与序列长度成反比，A/D 的位数 $BD=12\text{bits}$ ，故有

$$u_5 = u_{5i} \times n_0/n = 2.7 \times 10^{-7} \times 0.034598341 \times 1009/1634 \text{ rad} = 5.77 \times 10^{-9} \text{ rad}$$

服从正态分布，其自由度 $\nu_5 = n_0 - 4 = 1009 - 4 = 1005$ 。

G.5.4 合成不确定度计算

将各不确定度分量及其分布列表如下表 G.5.3。从表 G.5.3 可见， $u_c(v)$ 由多个不确定度分量组成，各不确定度分量没有绝对占优势的，可判断其符合正态分布。

表 G.5.3 各不确定度分量及其分布列表

不确定度分量	量值	分布	自由度
u_1	$6.35 \times 10^{-4}\text{Hz}$	均匀	∞
u_2	$2.75 \times 10^{-7}\text{rad}$	正态	∞
u_3	$3.79 \times 10^{-8}\text{rad}$	均匀	96
u_4	$4.73 \times 10^{-7}\text{rad}$	均匀	165
u_5	$5.77 \times 10^{-9}\text{rad}$	正态	1005
u_6	0.146 Sa/s	正态	9
$u_c(v)$	0.19 Sa/s	正态	26

采集速率 v 的合成标准不确定度：

$$u_c(v) = \sqrt{\frac{4\pi^2 u_1^2 + v^2 (u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2)}{\omega^2}} + u_6^2 = 0.19 \text{ Sa/s}$$

$$u_c(v)/v = 9.6 \times 10^{-5}$$

其有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(v)$ ：

$$\nu_{\text{eff}}(v) = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^6 \frac{c_i^4 u_i^4}{\nu_i}} = \frac{u_c^4(v)}{\frac{16\pi^4 u_1^4}{\omega^4 \nu_1} + \frac{v^4}{\omega^4} \left(\frac{u_2^4}{\nu_2} + \frac{u_3^4}{\nu_3} + \frac{u_4^4}{\nu_4} + \frac{u_5^4}{\nu_5} \right) + \frac{u_6^4}{\nu_6}} = 26$$

G.5.5 扩展不确定度

令置信概率 $P=95\%$ ，由有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(v) = 26$ ，查 t 分布表得包含因子 $k_P = t_P(\nu_{\text{eff}}) = 2.056$ ，则采集速率 v 的扩展不确定度：

$$U(v) = k_P \times u_c(v) = 2.056 \times 0.19 \text{ Sa/s} = 0.39 \text{ Sa/s}$$

G.5.6 测量结果的最终表述

正弦波拟合法获得的采集速率：

$$v_0 = v \pm U(v) = (1977.64 \pm 0.39) \text{ Sa/s} \quad (k=2.056, P=95\%)$$

其中，“±”后面的数据表示扩展不确定度，由置信概率 $P=95\%$ 和有效自由度 $\nu_{\text{eff}}=26$ ，查 t 分布表可得包含因子 $k=2.056$ 。

G.6 通道间延迟时间差的测量不确定度评定

G.6.1 测量原理与方法

通道间延迟时间差评价的基本思想是将一个正弦波信号同相加载到数据采集系统的不同通道上，通过对采集数据进行正弦曲线拟合，计算出每一通道第一个采集数据在拟合正弦波中所对应的初始相位 φ ，不同通道初始相位值间的相位差 $\Delta\varphi$ 反映的时间差 Δt ，即是所要获得的数据采集系统通道间延迟时间差。具体方法如下：

设，数据采集系统通道的量程为 E_r ，通道采集速率 v ； $E \leq E_r/2$ ，输入信号的频率 $f_0 \leq v/3$ ，(推荐取 $f_0 = N \cdot v/n$)；给其加载一个低失真正弦波信号：

$$e(t) = E \cdot \sin(2\pi f_0 t + \varphi) + d_0 \dots \dots \dots \text{(G.6.1)}$$

其中， d_0 为信号的直流偏置值，不失一般性，选取 $d_0=0$ ； n 为通道采集数据个数， N 为通道采集的信号整周期个数； n 与 N 互质

启动采集，获得采集数据 $x_i (i=1, \dots, n)$ ，按最小二乘法求出采集数据 $x_i (i=1, \dots, n)$ 的最佳拟合信号：

$$a(t) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi) + d \dots \dots \dots \text{(G.6.2)}$$

其中， $a(t)$ ——为拟合信号的瞬时值； A ——为拟合正弦信号幅度； f ——为拟合正弦信号频率； φ ——为拟合正弦信号初相位； d ——为拟合信号直流分量值

由于实际的采集数据是一些离散化的值 x_i ，对应地，其时间也是离散化的 t_i ，其中， $t_i = i/v$ 为第 i 个测量点的时刻 ($i=1, \dots, n$)；这样，式(G.6.2)变为：

$$a(t_i) = A \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t_i + \varphi) + d$$

简记为

$$a(i) = A \cdot \sin(\omega \cdot i + \varphi) + d \dots \dots \dots \text{(G.6.3)}$$

其中 $\omega = 2\pi f_0/v$ ；则，实际偏差有效值 ρ 为：

$$\rho = \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - A \cdot \sin(\omega \cdot i + \varphi) - d)^2 \right)^{1/2}$$

当 ρ 最小时，可得式(G.6.1)的最小二乘意义下的拟合正弦信号式(G.6.3)。此时，可得初始相位拟合结果 $\varphi (0 \leq \varphi < 2\pi)$ ； φ 所对应的初始时刻 t_0

$$t_0 = \varphi / (2\pi f_0) \dots \dots \dots \text{(G.6.4)}$$

通道 m 和通道 k 各自的初始相位 φ_{m0} 和 φ_{k0} 对应的初始时刻 t_{m0} 和 t_{k0} 之差，即是此二通道的通道间延迟时间差 T_{mk} 。

$$\begin{aligned} t_{m0} &= \varphi_{m0} / (2\pi f_0), & 0 \leq \varphi_{m0} < 2\pi \\ t_{k0} &= \varphi_{k0} / (2\pi f_0), & 0 \leq \varphi_{k0} < 2\pi \\ T_{mk} &= t_{m0} - t_{k0} = (\varphi_{m0} - \varphi_{k0}) / (2\pi f_0) = \varphi_{mk} / (2\pi f_0) \dots \dots \dots \text{(G.6.5)} \end{aligned}$$

G.6.2 测量不确定度模型

由式(G.6.5)可见，通道间延迟时间差 T_{mk} 与信号频率 f_0 、采集序列 $x_i (i=1, \dots, n)$ 的初始相位 φ_{m0} 和 φ_{k0} 均有关，而采集正弦波序列的谐波失真、杂波和噪声、量化误差、抖动、序列长度，以及序列中所含信号周期个数，均将给拟合初始相位值带来影响，因此，可列出 T_{mk} 测量不确定度的主要来源：

① 正弦信号源频率误差。它带来正弦信号频率 f_0 的不确定度 $u_1 = u(f_0)$ 。

② 采样序列的谐波失真。主要由信号的谐波失真、波形采集系统的非线性误差等因素造成，可包含多次谐波分量的影响。它带来的拟合初始相位 φ_{m0} 和 φ_{k0} 的测量不确定度分别为 u_{2m}

和 u_{2k} 。

③ 采样序列的噪声及非谐波失真。主要由信号随机噪声、杂波失真，采集系统的量化误差等因素造成；也包含没有在第②项的谐波失真中被计入的高次谐波失真分量和微弱的较低次谐波失真分量的影响。它带来的拟合初始相位 φ_{m0} 和 φ_{k0} 的测量不确定度分别为 u_{3m} 和 u_{3k} 。

④ 采样序列的抖动。主要由正弦信号周期不稳定、波形采集系统的采样间隔不稳定带来的测量序列的信号周期性变动造成。它带来的拟合初始相位 φ_{m0} 和 φ_{k0} 的测量不确定度分别为 u_{4m} 和 u_{4k} 。

⑤ 正弦波拟合软件误差。主要由软件收敛判据、舍入误差、累积误差等造成。它造成的拟合初始相位 φ_{m0} 和 φ_{k0} 的测量不确定度分别为 u_{5m} 和 u_{5k} 。

⑥ T_{mk} 测量重复性带来的不确定度 u_6 。

另外，采集序列长度的变化、序列中所含信号周期个数的变化，也将给通道间延迟时间差的测量带来影响，它们将体现在上述各项不确定度的分量中，不单独列出。

由式(G.6.5)可得

$$dT_{mk} = \frac{\partial T_{mk}}{\partial f_0} df_0 + \frac{\partial T_{mk}}{\partial \varphi_{m0}} d\varphi_{m0} + \frac{\partial T_{mk}}{\partial \varphi_{k0}} d\varphi_{k0} = \frac{\varphi_{m0} - \varphi_{k0}}{-2\pi f_0^2} df_0 + \frac{d\varphi_{m0}}{2\pi f_0} - \frac{d\varphi_{k0}}{2\pi f_0} \dots\dots (G.6.6)$$

灵敏系数

$$c(f_0) = \frac{\partial T_{mk}}{\partial f_0} = -\frac{\varphi_{m0} - \varphi_{k0}}{2\pi f_0^2}; \quad c(\varphi_{m0}) = \frac{\partial T_{mk}}{\partial \varphi_{m0}} = \frac{1}{2\pi f_0}; \quad c(\varphi_{k0}) = \frac{\partial T_{mk}}{\partial \varphi_{k0}} = -\frac{1}{2\pi f_0}$$

由于测量值 $y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 对于输入 X_i 的测量值 x_i ($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$) 的不确定度传递公式为:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \right) u(x_i, x_j)} \dots\dots\dots (G.6.7)$$

$$u(x_i, x_j) = r(x_i, x_j) \cdot u(x_i) \cdot u(x_j) \dots\dots\dots (G.6.8)$$

式中， x_i ——为输入 X_i 的测量值； x_j ——为输入 X_j 的测量值，($i \neq j$, 则 $X_i \neq X_j$)；

$u(x_i)$ ——为 x_i 的标准不确定度； $u(x_j)$ ——为 x_j 的标准不确定度，($i \neq j$)；

$u(x_i, x_j)$ ——为 x_i 、 x_j 的协方差估计值，($i \neq j$)；

$r(x_i, x_j)$ ——为 x_i 、 x_j 的相关系数估计值，($i \neq j$)；

本测量过程中，显然可以认为：拟合初始相位 φ_{m0} 不同的不确定度分量之间不相关；拟合初始相位 φ_{k0} 不同的不确定度分量之间不相关；则它们的合成标准不确定度 $u_c(\varphi_{m0})$ 与 $u_c(\varphi_{k0})$ ：

$$u_c(\varphi_{m0}) = \sqrt{u_{2m}^2 + u_{3m}^2 + u_{4m}^2 + u_{5m}^2} \dots\dots\dots (G.6.9)$$

$$u_c(\varphi_{k0}) = \sqrt{u_{2k}^2 + u_{3k}^2 + u_{4k}^2 + u_{5k}^2} \dots\dots\dots (G.6.10)$$

通道间延迟时间差 T_{mk} 的不确定度分量中，可以认为， $u_c(\varphi_{m0})$ 、 $u_c(\varphi_{k0})$ 、 u_1 分量之间互不相关，则其合成标准不确定度 $u_c(T_{mk})$ 。

$$\begin{aligned} u_c(T_{mk}) &= \left(c^2(f_0) \cdot u_1^2(f_0) + c^2(\varphi_{m0}) \cdot u_c^2(\varphi_{m0}) + c^2(\varphi_{k0}) \cdot u_c^2(\varphi_{k0}) + u_6^2 \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{T_{mk}^2}{f_0^2} u_1^2 + \frac{u_c^2(\varphi_{m0}) + u_c^2(\varphi_{k0})}{4\pi^2 f_0^2} + u_6^2} \dots\dots\dots (G.6.11) \end{aligned}$$

四参数正弦波拟合中，误差界的经验公式给出了其依信号周期个数和谐波阶次变化而变化趋势的一个较好拟合结果。

若 ΔN 为信号周期数误差； ΔA 为信号拟合幅度误差； $\Delta\varphi$ 为信号拟合相位误差； Δd 为信号直流分量估计值误差； n 为记录数据个数($n \geq 2Nh$)； N 为记录中所含信号周期个数($\omega n T / (2\pi)$)； h 为谐波阶次。则该结果中，估计参数误差的误差界如下：

$$\max|\Delta N| = \frac{0.90}{(Nh)^{1.2}} \cdot \frac{A_h}{A} \dots\dots\dots (G.6.12)$$

$$\max\left|\frac{\Delta A}{A}\right| = \frac{1.00}{(Nh)^{1.25}} \cdot \frac{A_h}{A} \dots\dots\dots (G.6.13)$$

$$\max|\Delta\varphi| = \frac{180^\circ}{(Nh)^{1.25}} \cdot \frac{A_h}{A} \dots\dots\dots (G.6.14)$$

$$\max\left|\frac{\Delta d}{A}\right| = \frac{0.61}{(Nh)^{1.21} \cdot h^{1.1}} \cdot \frac{A_h}{A} \dots\dots\dots (G.6.15)$$

假设由谐波 A_h 造成的拟合初始相位 φ_{m0} 的测量误差在其误差界内服从均匀分布，则 A_h 给 φ_{m0} 带来的测量不确定度 $u_{\varphi_m}(A_h)$ 由式(G.6.14)可得：

$$u_{\varphi_m}(A_h) = \frac{\Delta\varphi_{m0}}{\sqrt{3}} = \frac{180^\circ}{\sqrt{3}} \cdot \frac{A_h}{(Nh)^{1.25} \cdot A\sqrt{3}}$$

由于三角函数基的正交性，不同谐波之间互不相关，则由所有谐波给 φ_{m0} 带来的测量不确定度：

$$u_{2m} = \sqrt{\sum_{h \geq 2} u_{\varphi_m}^2(A_h)} = \sqrt{\sum_{h \geq 2} \frac{10800 A_h^2}{(Nh)^{2.5} \cdot A^2}}$$

同理，对于通道 k ，有

$$u_{2k} = \sqrt{\sum_{h \geq 2} u_{\varphi_k}^2(A_h)}$$

G.6.3 测量数据及处理

图 G.6.1 是使用某型数据采集系统通道 1 和通道 2，同时对于某型信号源进行测量获得的两个正弦信号波形的局部。其 A/D 位数 $BD=8\text{bits}$ ，测量范围 $-0.5\text{V} \sim 0.5\text{V}$ ，通道采集速率 $v=2\text{GSa/s}$ ，采样点数 $n_0=2500$ ；信号峰值 0.5V ，频率 19.9990000MHz 。

从图 G.6.1 可见，两个通道的波形基本重合，通道间的延迟时间差异很小。

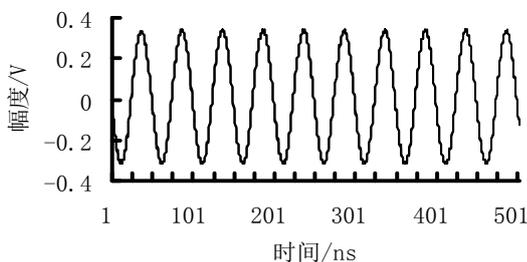


图 G.6.1 实测正弦曲线波形

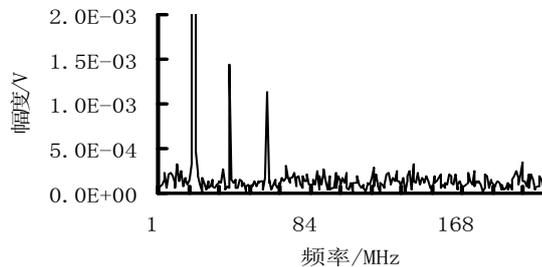


图 G.6.2 通道 1 实测曲线频谱特性

选取序列周波数 $N=9$ ， $n=900$ ，经四参数拟合，获得通道 1 (设为 m) 的参数： $A_m=0.32536565\text{V}$ ； $\omega_m=0.0628325343$ ； $\varphi_{m0}=77.7402^\circ$ ； $d_m=-0.9089015\text{mV}$ ； $\rho_m=3.49466\text{mV}$ ；有效位数 6.368Bits (它是 ρ_m 相对于采集量程以 A/D 有效量化位数表述的对应量值)。

得通道 2 (设为 k) 的参数： $A_k=0.32615036\text{V}$ ； $\omega_k=0.0628279031$ 弧度； $\varphi_{k0}=76.7217^\circ$ ； $d_k=-0.06200369\text{mV}$ ； $\rho_k=3.52142\text{mV}$ ；有效位数 6.357Bits 。

图 G.6.2 为通道 1 实测曲线的频谱图, 为详细观测谐波分量起见, 将幅度刻度调小, 截断了基波的大部分。从该曲线可见, 该测量序列主要的谐波失真为 2、3 次谐波, 其它谐波分量与噪声没有什么区别, 故不确定度分量 u_{2m} 中仅需计算 2、3 次谐波的影响即可, 各主要谐波分量及其给拟合相位 φ_{m0} 造成的不确定度 $u_{\varphi m}(A_h)$ 如表 G.6.1 所示。

表 G.6.1 采集序列 1 基波与各主要谐波幅度值

波次	$A_h(\text{V})$	φ_h°	$u_{\varphi m}(A_h)^\circ$
基波	0.325232	77.884	
2 次谐波	1.449×10^{-3}	-42.386	0.01249
3 次谐波	1.126×10^{-3}	-43.663	0.005846
4 次谐波	2.019×10^{-4}	26.575	0.00073

则, $u_{2m}=0.05240^\circ$, 服从梯形分布, 自由度 $\nu_{2m}=\infty$; 从采集序列中减去上述已经被 u_{2m} 计入的谐波分量后, 重新进行四参数拟合得:

$A=0.3252772\text{V}$; $\omega=0.06282936$ 弧度; $\varphi=77.6907^\circ$; $d=0.319\text{mV}$; $\rho=3.2338\text{mV}$; 有效位数 6.48Bits。

在随机噪声状态下, ρ^2 为噪声方差 (剔除谐波因素后的拟合方差)。正弦波最小二乘拟合四个参数的方差分别为幅度方差 S_A^2 、角频率方差 S_ω^2 、相位方差 S_φ^2 、直流分量方差 S_d^2 , 则, 幅度规范化方差 S_A^2/ρ^2 、相位规范化方差 $S_\varphi^2 A^2/\rho^2$ 、直流分量规范化方差 S_d^2/ρ^2 以及角频率规范化方差 $S_\omega^2 A^2/\omega^2 \rho^2$ 的描述如图 G.6.3, 在 36 个等间距信号初相位上对应的误差界, 随信号周期数变化而变化情况。这里, $n_0=100$, 各描述值均与 n 成反比。

幅度、直流分量和频率的方差表示成比例方差的形式 (如 S_A^2/A^2 、 S_d^2/A^2 和 S_ω^2/ω^2) 通常更为实用。这些比例方差可以从图 G.6.3 按下述方式确定:

①、对比例方差 S_A^2/A^2 , 从图 G.6.3(a) 中找出归一化 A 方差与周期个数关系的确切位置, 用相应的噪声比例方差 ρ^2/A^2 以及 $100/n$ 连乘即得;

②、对于直流分量与相应正弦幅度 A 的比例方差 S_d^2/A^2 , 从图 G.6.3(c) 中找出归一化 d 方差, 再乘以 $100\rho^2/nA^2$ 可得;

③、对于比例方差 S_ω^2/ω^2 , 在图 G.6.3(d) 中, 找出相应信号周期数的比例方差, 最后乘以 $100\rho^2/nA^2$ 即可得;

④、初相位的直接方差 S_φ^2 , 可从图 G.6.3(b) 中的 φ 方差中找到, 用 $100\rho^2/nA^2$ 乘后获得。

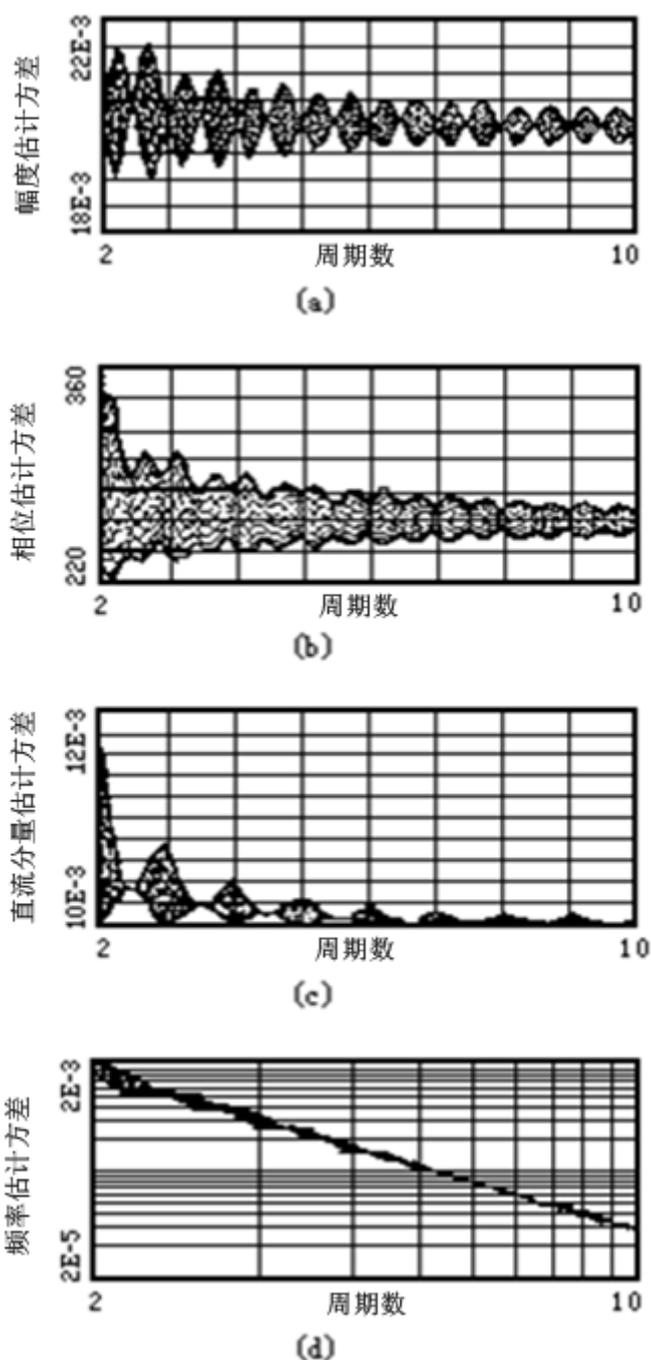


图 G.6.3 规范化参数估计方差(由噪声引起的)与周期个数的函数关系.

- (a) 幅度规范化方差 S_A^2/ρ^2 .
- (b) 相位规范化方差 $S_\phi^2 A^2/\rho^2$.
- (c) 直流分量规范化方差 S_d^2/ρ^2 .
- (d) 角频率规范化方差 $S_\omega^2 A^2/\omega^2 \rho^2$.

由 $N=9$, $n=900$, $\rho=3.2338\text{mV}$, 结合图 G.6.3(b), 可确定 $n_0=100$ 点时相位 φ_{m_0} 的规范化方差 $\sigma_\phi^2=S_\phi^2 A^2/\rho^2=270^\circ$, 则本实验中:

$$u_{3m} = S_\phi = \sqrt{\frac{\sigma_\phi^2 \rho^2 n_0}{A^2 n}} = 0.01722^\circ$$

服从均匀分布，其自由度

$$v_{3m}=n_0-4=96$$

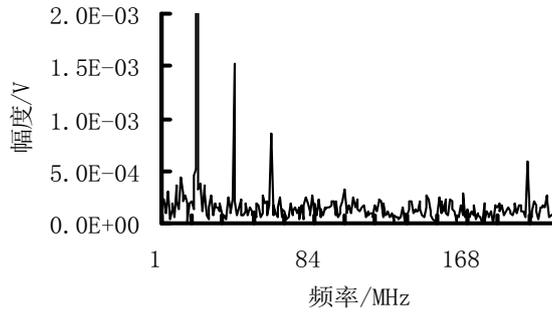


图 G.6.4 通道 2 实测曲线频谱特性

图 G.6.4 为通道 2 实测曲线的频谱图，为详细观测谐波分量起见，将幅度刻度调小，截断了基波的大部分，从该曲线可见，该测量序列主要的谐波失真为 2、3 次谐波和 10 次谐波，其它谐波分量与噪声没有什么区别，故不确定度分量 u_{2k} 中仅需计算 2、3、10 次谐波的影响即可，各主要谐波分量及其给拟合相位 φ_{k0} 造成的不确定度 $u_{\varphi k}(A_h)$ 如表 G.6.2:

表 G.6.2 采集序列 2 基波与各主要谐波幅度值

波次	$A_h(V)$	φ_h°	$u_{\varphi k}(A_h)^\circ$
基波	0.326186	76.952	
2 次谐波	1.519×10^{-3}	-43.303	0.01305
3 次谐波	8.607×10^{-4}	-45.610	0.00446
10 次谐波	5.814×10^{-4}	50.830	0.000668

则 $u_{2k}=0.01381^\circ$ ，服从正态分布，自由度 $v_{2k}=\infty$ ；从采集序列中减去上述已经被 u_{2k} 计入的谐波分量后，重新进行四参数拟合可得：

$A=0.3262662V$ ； $\omega=0.06282993$ 弧度； $\varphi=76.7663^\circ$ ； $d=1.689mV$ ； $\rho=3.1848mV$ ；有效位数 6.50Bits。

由 $N=9$ ， $n=900$ ， $\rho=3.1848mV$ ；从图 G.6.3(b)中查得： $n_0=100$ 点时相位 φ_{k0} 的规范化方差 $\sigma_\varphi^2=S_\varphi^2 A^2/\rho^2=270^\circ$ ，则本节中：

$$u_{3k} = S_\varphi = \sqrt{\frac{\sigma_\varphi^2 \rho^2 n_0}{A^2 n}} = 0.05347^\circ$$

服从均匀分布，其自由度

$$v_{3k}=n_0-4=96$$

实际情况下，始终存在波形抖动，它将造成拟合相位的抖动并产生通道间延迟时间差不确定度。当存在如下几个前提条件时：

- ①、抖动的高阶导数项的影响可忽略；
- ②、任何谐波失真都足够小，以致于它对导数的影响可忽略；
- ③、抖动误差的均值为 0，尽管这并不严格真实；
- ④、每一采样点的抖动与其它点独立。则由抖动误差所引起的标准偏差可以估计。

图 G.6.5 为图 G.6.1 中通道 1 曲线波形的相位 φ_{m0} 抖动测量结果曲线。可得 φ_{m0} 的均值 $\bar{\varphi}_{m_0}=77.6353^\circ$ ，相位 φ_{m0} 抖动的实验标准偏差 $s_{\varphi m}=0.1377^\circ$ ；相位 φ_{m0} 抖动的最大值 $\lambda_{\varphi m}=0.7194^\circ$ 。它是由 $M_0=1599$ 组值实测获得，每组 $N=9$ ， $n=900$ 。则本实验中， $u_{4m}=s_{\varphi m}=0.1377^\circ$ ；服从均匀分布，其自由度 $v_{4m}=M_0-1=1598$ 。

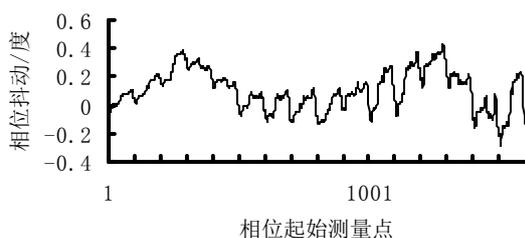


图 G.6.5 通道 1 相位抖动测量结果

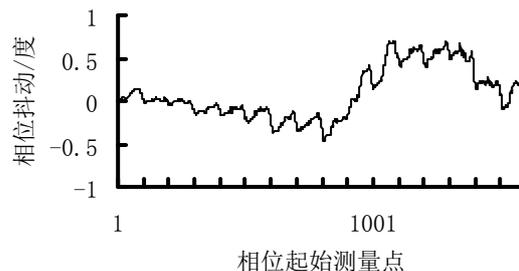


图 G.6.6 通道 2 相位抖动测量结果

图 G.6.6 为图 G.6.1 中通道 2 曲线波形的相位 φ_{k0} 抖动测量结果曲线。可得相位 φ_{k0} 的均值 $\bar{\varphi}_{k0} = 76.7324^\circ$ ，相位 φ_{k0} 抖动的实验标准偏差 $s_{\varphi k} = 0.2981^\circ$ ；相位 φ_{k0} 抖动的最大值 $\lambda_{\varphi k} = 1.1762^\circ$ 。它是由 $M_0 = 1599$ 组值实测获得，每组 $N = 9$ ， $n = 900$ 。则本节中， $u_{4k} = s_{\varphi k} = 0.2981^\circ$ ；服从均匀分布，其自由度 $\nu_{4k} = M_0 - 1 = 1598$ 。

则，由式(G.6.12)得通道间延迟时间差为

$$T_{mk} = t_{m0} - t_{k0} = (\varphi_{m0} - \varphi_{k0}) / (2\pi f_0) = 1.25 \times 10^{-10} \text{s}$$

测量条件不变，重复测量 10 次，获得 10 次 T_{mk} 测量结果的实验标准偏差为 $s_{T_{mk}} = 9.1 \times 10^{-12} \text{s}$ ，则 $u_6 = s_{T_{mk}} = 9.1 \times 10^{-12} \text{s}$ ，服从正态分布，其自由度 $\nu_6 = 10 - 1 = 9$ 。

由信号频率 19.9990000MHz 和信号源说明书得，正弦标准信号源频率最大允许误差为： $\pm 5 \times 10^{-6}$ 读值 = $\pm 99.995 \text{Hz}$ ；

设信号频率 f_0 的误差在该范围内服从均匀分布，则其不确定度：

$$u_1 = u(f_0) = 99.995 / 3^{1/2} = 57.73214 \text{Hz}，其自由度 \nu_1 = \infty。$$

数据处理软件带来的不确定度 u_5 ，由参数已知的仿真数据使用数据处理软件处理的结果，当 $n_0 = 1009$ 时，按 A 类不确定度评价方法获得对 2π 角度的归一化标准偏差为： $\sigma_\varphi = 2.1 \times 10^{-7}$ 。

由于拟合误差与序列长度成反比，故有：

$$u_{5m} = \sigma_\varphi \times 360^\circ \times n_0 / n = 2.1 \times 10^{-7} \times 360 \times 1009 / 900 = 8.48 \times 10^{-5} \text{度}，服从正态分布，$$

其自由度 $\nu_{5m} = n_0 - 4 = 1009 - 4 = 1005$ 。且 $u_{5k} = u_{5m}$ ， $\nu_{5k} = \nu_{5m}$ 。

G.6.4 合成不确定度计算

将各不确定度分量及其分布列表如下表 G.6.3。从表 G.6.3 可见， $u_c(T_{mk})$ 由多个不确定度分量组成，各不确定度分量中没有占绝对优势的分量，可判断其符合正态分布。

表 G.6.3 各不确定度分量及其分布列表

不确定度分量	量值	分布	自由度
u_1	57.73214Hz	均匀	∞
u_{2m}	0.05240°	梯形	∞
u_{2k}	0.01381°	正态	∞
u_{3m}	0.01722°	均匀	96
u_{3k}	0.05347°	均匀	96
u_{4m}	0.1377°	均匀	1598
u_{4k}	0.2981°	均匀	1598
u_{5m}	$(8.48 \times 10^{-5})^\circ$	正态	1005
u_{5k}	$(8.48 \times 10^{-5})^\circ$	正态	1005
u_6	$9.1 \times 10^{-12} \text{s}$	正态	9
$u_c(T_{mk})$	$4.8 \times 10^{-11} \text{s}$	正态	1954

初相位的标准不确定度 $u_c(\varphi_{m0})$ 与 $u_c(\varphi_{k0})$

$$u_c(\varphi_{m0}) = \sqrt{u_{2m}^2 + u_{3m}^2 + u_{4m}^2 + u_{5m}^2} = 0.148^\circ = 0.002583\text{rad}$$

$$u_c(\varphi_{k0}) = \sqrt{u_{2k}^2 + u_{3k}^2 + u_{4k}^2 + u_{5k}^2} = 0.303^\circ = 0.005288\text{rad}$$

通道间延迟时间差 T_{mk} 的合成标准不确定度

$$u_c(T_{mk}) = \sqrt{\frac{T_{mk}^2}{f_0^2} u_1^2 + \frac{u_c^2(\varphi_{m0}) + u_c^2(\varphi_{k0})}{4\pi^2 f_0^2} + u_6^2} = 4.8 \times 10^{-11}\text{s}$$

其有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(T_{mk})$

$$\nu_{\text{eff}}(T_{mk}) = \frac{u_c^4(T_{mk})}{\sum_{i=1}^{10} C_i^4 \frac{u_i^4}{\nu_i}} = 1954$$

G.6.5 扩展不确定度

令置信概率 $P=95\%$ ，由有效自由度 $\nu_{\text{eff}}(T_{mk})=1954$ ，查 t 分布表得包含因子 $k_P=t_P(\nu_{\text{eff}})=1.96$ ，则通道间延迟时间差 T_{mk} 的扩展不确定度：

$$U(T_{mk})=k_P \times u_c(T_{mk})=1.96 \times 4.8 \times 10^{-11}\text{s}=9.4 \times 10^{-11}\text{s}$$

G.6.6 测量结果的最终表述

正弦波拟合法获得的通道间延迟时间差

$$T_{mk0}=T_{mk} \pm U(T_{mk})=(1.25 \times 10^{-10} \pm 9.4 \times 10^{-11})\text{s} (k=1.96, P=95\%)$$

其中，“ \pm ”后面的数据表示扩展不确定度，其包含因子 $k=1.96$ ，该值由置信概率 $P=95\%$ 、有效自由度 $\nu_{\text{eff}}=1954$ ，通过查 t 分布表获得。